ELEMENTE

der

Astronomischen Positionsbestimmung

mit dem

Kreismicrometer,

von

C. RAPP.





MANNHEIM.
Buchdruckerei von J. Schneider.
1861.

Vorwort.

In der folgenden Abhandlung soll keine vollständige Theorie des Kreismicrometers gegeben werden, sondern dieselbe nur so weit ausgearbeitet sein, als sie zu praktischen Beobachtungen mit diesem Micrometer nothwendig ist. Um die Arbeit nicht zu sehr auszudehnen, musste die Theorie der Refraction weggelassen werden; es sind dafür nur die Formeln und die praktische Anwendung derselben an berechneten Beobachtungen gegeben. Da in den Sternkatalogen die mittlern Oerter der Sterne für irgend eine Periode gegeben sind, alle Vergleichsterne aber auf den scheinbaren d. h. beobachteten Ort reducirt werden müssen, so geht der Theorie des Kreismicrometers eine kurze Betrachtung der Wirkung der Präcession, Nutation und Aberration voraus, um die theoretischen Formeln kennen zu lernen, nach welchen die Reduction der Sterne auf den scheinbaren Ort ausgeführt werden. Die

1*

Formeln sind nur bis zu den veränderlichen Grössen der 1. Ordnung ausgeführt, weil man mit diesen in der Praxis fast überall ausreicht.

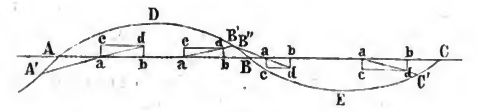
Im Anschlusse befinden sich die Positionen der Plejaden-Sterne nach den Bessel'schen Messungen, für Durchmesser-Bestimmungen besonders geeignet, sowie eine Tafel für Refraction. Beide Tafeln dürften willkommen sein, da nicht jeder Beobachter an einer Sternwarte wohnt und das Glück hat, den Astronomen zum Freunde zu haben, der ihm mit Rath und That zur Seite steht.

So möge denn diese kleine Abhandlung ihren Zweck erfüllen und meinen verehrten Fachcollegen, so wie den Freunden der Astronomie, die im Besitze eines astronomischen Fernrohres von nur 2 bis 3 Fuss Brennweite sind, die Mittel bieten, mit einem kleinen Aufwande für ein Ringmicrometer, einer Pendeluhr, eines astronomischen Jahrbuchs und einigen Sternkatalogen, Beobachtungen zu machen, die der Wissenschaft förderlich sind, ihnen selbst aber vielfaches Vergnügen bieten.

Der Verfasser.

I. Praecession.

Man bezeichnet mit Präcession die Erscheinung, nach welcher alle Längen der Fixsterne jährlich um 50″,2 zunehmen, während die Breiten derselben im Allgemeinen dieselben bleiben. Die physische Astronomie erklärt diese Erscheinung nach dem Newton'schen Gravitationsgesetze aus der Anziehung der Sonne und des Mondes auf den Theil der Erde, der übrig bleibt, wenn man die Kugel, deren Halbmesser die Polaraxe ist, von dem Erdsphäroid abzieht. Auf diese am Aequator der Erde angehäufte Masse wirkt die Sonne von der Ebene der Ekliptik aus.



Stellt ABC den Aequator vor, $ADEC$ die Ekliptik, so wird ein Punkt a des Aequators durch die Rotation der Erde nach b, durch die Anziehung der Sonne nach c getrieben. Unter Einwirkung beider Kräfte nimmt er seinen Weg von a nach d. Dadurch wird die Lage des Aequators so geändert, dass sein Durchschnittspunkt mit der Ekliptik in A' liegt, dieser Durchschnitt also rückwärts ging und die Schiefe der Ekliptik abgenommen hat, weil $\sphericalangle\, dA'D < bAD$ ist. Derselbe findet bei B statt, wo aber wegen $\sphericalangle\, aB'D > aBD$ die Schiefe wieder zunimmt. Ebenso bei B'', wo die Schiefe wieder ababnimmt, da $\sphericalangle\, aB''E < aBE$; dessgleichen bei C' wo die Schiefe wegen $\sphericalangle\, aC'E > aCE$ wieder zunimmt.

Es entsteht also für jeden Quadranten ein Rückgang der Aequinoctialpunkte, während dem die Neigung des Aequators und der Ekliptik constant bleibt. Die Verschiebung des Aequators ist also eine mit sich selbst parallele und ändert die Längen der Sterne, lässt aber ihre Breite ungeändert.

Ganz auf dieselbe Art bewirkt auch der Mond eine parallele Verschiebung des Aequators, während dem auch hier die Ebene der Ekliptik eine feste ist. Diese gemeinschaftliche Anziehung der Sonne und des Mondes, wodurch dieser Rückgang der Aequinoctien bewirkt wird, nennt man die *Lunisolarpräcession.*

Aber nicht allein Sonne und Mond wirken anziehend auf die Erde, sondern auch die Planeten, besonders wegen ihrer grossen Nähe die *Venus*, wodurch die Ekliptik dem Aequator genähert wird. Zerlegt man diese Anziehung in eine zur Ebene der Ekliptik parallele und in eine dazu senkrechte, so wird durch die erste Wirkung die Rectascension und Länge kleiner, die Declination bleibt ungeändert; durch die 2te Kraft aber die Neigung des Aequators und der Ekliptik verändert, wodurch beide nahezu um 48 Sekunden im Jahrhundert genähert werden, während das Vorwärtsgehen der Aequinoctialpunkte für denselben Zeitraum etwa 16″ beträgt. Da aber die Planeten im Laufe der Jahrhunderte ihre Lage gegen die Erdbahn verändern, so wird die Schiefe der Ekliptik wieder zunehmen und dadurch die Aequinoctialpunkte wieder rückwärts gehen. Diese Veränderung der Sterne durch die Planeten-Anziehung heisst *säculare Aenderung der Schiefe der Ekliptik*, und die der betreffenden Bewegung der Aequinoctien die *Planetenpräcession.*

Lunisolar- und Planetenpräcession heisst auch *die allgemeine Präcession.*

Bezeichnet man die Lunisolarpräcession mit ψ
die allgemeine Präcession mit $\psi_{,}$
die Schiefe der festen Ekliptik mit ε
die Schiefe der wahren Ekliptik mit $\varepsilon_{,}$

so ist nach Bessel seit 1750 + *t* die Gesammtwirkung von

$$\psi = t \,.\, 50'',37572 - t^2 .\, 0,0001217945$$
$$\psi_{,} = t \,.\, 50'',21129 + t^2 .\, 0,0001221483$$
$$\varepsilon = 23^0\, 28'\, 18'',0 + t^2 .\, 0,00000984233$$
$$\varepsilon_{,} = 23^0\, 28'\, 18'',0 - t \,.\, 0'',48368 - t^2 .\, 0,00000272295$$

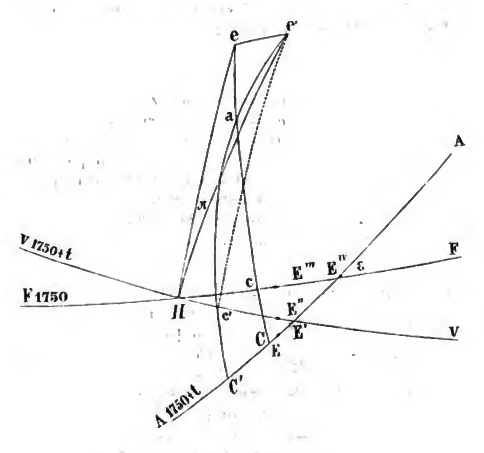
Will man für irgend ein Jahr die jährliche Präcession wissen, so suche man den 1ten Differentialquotienten.

$$\frac{d\psi_{,}}{dt} = 50'',21129 + 2 .\, 0'',0001221483\, t$$

z. B. für 1861 ist

$$\frac{d\psi_{,}}{dt} = 50'',21129 + 2 \,.\, 0'',0001221483 \,.\, 111 = 50'',23840$$

In der Figur sei:



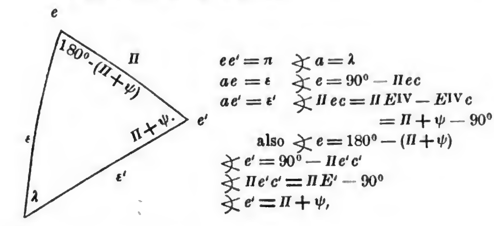
FF die feste Ekliptik von 1750
VV die wahre Ekliptik von 1750 + *t*
e der Pol der festen Ekliptik
e' der Pol der wahren Ekliptik
$ee' = \pi$
AA = Aequator von 1750 + *t*

$\sphericalangle\, AE^{IV}F = ae = \varepsilon$
$\sphericalangle\, AE'V = ae' = \varepsilon_,$
eaC Sommersolstitium von 1750
$e'aC'$ Sommersolstitium von 1750 + t
$E^{IV}C$ und $E'C' = 90^0$
E Punkt des Aequators, der im Jahr 1750 die Ebene der Ekliptik durchschnitt.
$E^{IV}E''' = \psi$ Bewegung des Aequators auf der festen Ekliptik seit 1750.
$E'E'' = \psi_,$ Bewegung des Aequators auf der wahren Ekliptik seit 1750.

Im Jahr 1750 fielen also die Punkte E, E'', & E''', zusammen.

Π ist der ☊ Knoten der wahren Ekliptik in der festen gezählt vom Frühlingsäquinoctium 1750.
$E^{IV}E' = CC' = \lambda = \sphericalangle\, a$ ist die Bewegung der Ekliptik im Aequator.

Im Polar-Dreieck aee' ist:



$ee' = \pi \quad \sphericalangle\, a = \lambda$
$ae = \varepsilon \quad \sphericalangle\, e = 90^0 - \Pi ec$
$ae' = \varepsilon' \quad \sphericalangle\, \Pi ec = \Pi E^{IV} - E^{IV}c$
$= \Pi + \psi - 90^0$
also $\sphericalangle\, e = 180^0 - (\Pi + \psi)$
$\sphericalangle\, e' = 90^0 - \Pi e'c'$
$\sphericalangle\, \Pi e'c' = \Pi E' - 90^0$
$\sphericalangle\, e' = \Pi + \psi,$

Die Neper'schen Analogien geben:

$$tg\, {}^1\!/_2 (\varepsilon_, + \varepsilon) = tg\, {}^1\!/_2\, \pi \frac{\cos {}^1\!/_2 (e - e')}{\cos {}^1\!/_2 (e + e')}$$

$$tg\, {}^1\!/_2 (\varepsilon_, + \varepsilon) = tg\, {}^1\!/_2\, \pi \frac{\sin {}^1\!/_2 (e - e')}{\sin {}^1\!/_2 (e + e')}$$

$$tg\, {}^1\!/_2\, \lambda \cos {}^1\!/_2 (\varepsilon_, + \varepsilon) = \cot g\, {}^1\!/_2 (e + e') \cos {}^1\!/_2 (\varepsilon' - \varepsilon)$$

$${}^1\!/_2 (e - e') = 90^0 - (\Pi + {}^1\!/_2\, \psi + {}^1\!/_2\, \psi_,)$$

$${}^1\!/_2 (e + e') = 90^0 - {}^1\!/_2 (\psi - \psi_,)$$

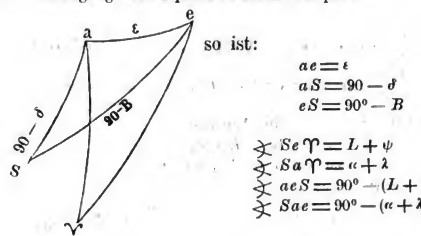
$$\left.\begin{array}{l} tg\, {}^1\!/_2\, \pi \sin (\Pi + {}^1\!/_2\, \psi + {}^1\!/_2\, \psi_,) = \sin {}^1\!/_2 (\psi - \psi_,)\, tg\, {}^1\!/_2 (\varepsilon_, + \varepsilon) \\ tg\, {}^1\!/_2\, \pi \cos (\Pi + {}^1\!/_2\, \psi + {}^1\!/_2\, \psi_,) = \cos {}^1\!/_2 (\psi - \psi_,)\, tg\, {}^1\!/_2 (\varepsilon_, - \varepsilon) \\ tg\, {}^1\!/_2\, \lambda \cos {}^1\!/_2 (\varepsilon_, + \varepsilon) = tg\, {}^1\!/_2 (\psi - \psi_,) \cos {}^1\!/_2 (\varepsilon_, - \varepsilon) \end{array}\right\} (1)$$

Entwickelt man nach den Potenzen von t bis zu den Gliedern der 2. Ordnung, so erhält man nach Bessel folgende Werthe für 1750 + t.

$$\left.\begin{array}{l} \Pi = 171^0\,36'\,10'' - 5'',21\,t \\ \pi = t\,.\,0'',48892 - t^2\,0'',0000030719 \\ \lambda = t\,.\,0'',17926 - t^2\,0'',0002660394 \end{array}\right\} (2)$$

Aufgabe. Es ist gegeben α und δ für $1750 + t$, man soll α' und δ' für $1750 + t'$ finden.

Es ist a der Pol des Aequators } bezogen auf
e der Pol der festen Ecliptik } $1750 + t$
L und B Länge und Breite des Stern's S für $1750 + t$
♈ ist der Durchschnitt des Aequators auf der festen Ekliptik von $1750 + t$, also ist ♈ Pol des grössten Kreises ae
λ = Bewegung des Aequators auf der Ekliptik



so ist:

$$ae = \varepsilon$$
$$aS = 90 - \delta$$
$$eS = 90^0 - B$$

$$\sphericalangle\, Se♈ = L + \psi$$
$$\sphericalangle\, Sa♈ = \alpha + \lambda$$
$$\sphericalangle\, aeS = 90^0 - (L + \psi)$$
$$\sphericalangle\, Sae = 90^0 - (\alpha + \lambda)$$

Im $\triangle$ aeS ist also:

$$\left.\begin{array}{l} \cos B \cos (L + \psi) = \cos \delta \cos (\alpha + \lambda) \\ \cos B \sin (L + \psi) = \cos \delta \sin (\alpha + \lambda) \cos \varepsilon + \sin \delta \sin \varepsilon \\ \sin B \sin = - \cos \delta \sin (\alpha + \lambda) \sin \varepsilon + \sin \delta \cos \varepsilon \end{array}\right\} (2)$$

Setzt man $\alpha + \lambda = a$ und differentirt man die Gleichungen (2) in denen also a, δ, ε, ψ veränderlich sind nach t, so erhält man:

$$\left\{\begin{array}{l} \cos \delta \sin a \dfrac{da}{dt} + \sin \delta \cos a \dfrac{d\delta}{dt} = \cos B \sin (L + \psi) \dfrac{d\psi}{dt} \\ \cos \delta \cos a \cos \varepsilon \dfrac{da}{dt} + (\cos \delta \sin \varepsilon - \sin \delta \sin a \cos \varepsilon) \dfrac{d\delta}{dt} \\ \qquad = \cos B \cos (L + \psi) \dfrac{d\psi}{dt} + (\cos \delta \sin a \sin \varepsilon - \sin \delta \cos \varepsilon) \dfrac{d\varepsilon}{dt} \\ - \cos \delta \cos a \sin \varepsilon \dfrac{da}{dt} + (\cos \delta \cos \varepsilon + \sin \delta \sin a \sin \varepsilon) \dfrac{d\delta}{dt} \\ \qquad = (\cos \delta \sin a \cos \varepsilon + \sin \delta \sin \varepsilon) \dfrac{d\varepsilon}{dt} \end{array}\right.$$

oder:

$$\beta \begin{cases} \cos\delta \sin a \frac{da}{dt} + \sin\delta \cos a \frac{d\delta}{dt} = \cos B \sin (L+\psi) \frac{d\psi}{dt} \\ \cos\delta \cos a \cos\varepsilon \frac{ad}{dt} + (\cos\delta \sin\varepsilon - \sin\delta \sin a \cos\varepsilon) \frac{d\delta}{dt} \\ \qquad = \cos B \cos (L+\psi) \frac{d\psi}{dt} + \sin B \frac{d\varepsilon}{dt} \\ -\cos\delta \cos a \sin\varepsilon \frac{da}{dt} + (\cos\delta \cos\varepsilon + \sin\delta \sin a \sin\varepsilon) \frac{d\delta}{dt} \\ \qquad = \cos B \sin (L+\psi) \frac{d\varepsilon}{dt} \end{cases}$$

(1) mit $\sin a$
(2) mit $\cos a \cos\varepsilon$
(3) mit $-\sin\varepsilon \cos a$
} multiplicirt & 1, 2, 3 addirt gibt:

$$\cos\delta \frac{da}{dt} = \frac{d\psi}{dt} \{\cos B \sin(L+\psi) \sin a + \cos B \cos (L+\psi) \cos\varepsilon \cos a\} -$$
$$- \frac{d\varepsilon}{dt} \{\sin B \cos\varepsilon \cos a + \cos B \sin (L+\psi) \sin\varepsilon \cos a\}$$

Führt man aus (2) die Werthe von $\cos B \sin (L+\psi)$ und $\cos B \cos (L+\psi)$ ein, so erhält man:

$$1)\ \cos\delta \frac{da}{dt} = (\cos\varepsilon \cos\delta + \sin\varepsilon \sin\delta \sin a) \frac{d\psi}{dt} - \sin\delta \cos a \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Durch ähnliche Betrachtung erhält man:

$$2)\ \frac{d\delta}{dt} \quad \sin\varepsilon \cos a \frac{d\psi}{dt} + \sin a \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

oder statt a wieder $\alpha + \lambda$ also statt

$$\frac{da}{dt}, \frac{da}{dt} + \frac{d\lambda}{dt}$$

gesetzt gibt:

$$\gamma \begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{d\lambda}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \cos\varepsilon + \frac{d\psi}{dt} \sin\varepsilon \, tg\, \delta \left\{\sin (\alpha+\lambda) - \frac{d\varepsilon}{d\psi} \frac{\cos (\alpha+\lambda)}{\sin\varepsilon}\right\} \\ \frac{d\delta}{dt} = \frac{d\psi}{dt} \sin\varepsilon \left\{\cos (\alpha+\lambda) + \frac{d\varepsilon}{d\psi} \frac{\sin (\alpha+\lambda)}{\sin\varepsilon}\right\} \end{cases}$$

Da $\frac{d\varepsilon}{d\psi}$ um eine Ordnung höher ist als $\frac{d\psi}{dt}$ so kann man statt

$\sin (\alpha+\lambda) - \frac{d\varepsilon}{d\psi} \frac{\cos (\alpha+\lambda)}{\sin\varepsilon}$ auch setzen $\sin \left(\alpha + \lambda - \frac{d\varepsilon}{\sin\varepsilon \, d\psi}\right)$

für

$\cos(\alpha+\lambda)+\frac{d\varepsilon}{d\psi}\frac{\sin(\alpha+\lambda)}{\sin\varepsilon}$ auch setzen $\cos\left(\alpha+\lambda-\frac{d\varepsilon}{\sin\varepsilon\, d\psi}\right)$

und da $\frac{d\varepsilon}{d\psi}=\lambda\sin\varepsilon$, so ist $\lambda-\frac{d\varepsilon}{d\psi\sin\varepsilon}=0$

Man hat also:

$$(\delta)\quad\begin{cases}\frac{d\alpha}{dt}=-\frac{d\lambda}{dt}+\frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon+\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon\sin\alpha\, tg\,\delta\\ \frac{d\delta}{dt}=\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon\cos\alpha\end{cases}$$

Differentirt man die Werthe von ψ und λ nach t und setzt

$$\left.\begin{array}{l}-\frac{d\lambda}{dt}+\frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon=m\text{, wo } m=46'',02824+t\,.\,0'',0003086450\\ \frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon=n\text{, wo } n=20'',06442-t\,.\,0'',0000970204\end{array}\right\}(3^*)$$

so ist:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d\alpha}{dt}=m+n\sin\alpha\, tg\,\delta\\ \frac{d\delta}{dt}=\cos\alpha\end{array}\right\}(3)$$ als jährlich Aenderung der AR und δ für das Jahr 1750 + t

Entwickelt man also die Ausdrücke für die Präcession in eine Reihe nach Potenzen von $t'-t$ so ist:

$$\alpha'=U+U'(t'-t)+U''(t'-t)^2+\ldots..$$
$$\delta'=W+W'(t'-t)+W''(t,-t)^2+\ldots..$$

wo

$$U=\alpha \qquad W=\delta$$
$$U'=\frac{d\alpha}{dt} \qquad W'=\frac{d\delta}{dt}$$
$$U''=\tfrac{1}{2}\frac{d^2\alpha}{dt^2} \qquad W''=\frac{d^2\delta}{dt^2}$$

Setzt man in den Gleichungen:

$$\begin{cases}\frac{d\alpha}{dt}\quad m+n\sin\alpha\, tg\,\delta\\ \frac{d\delta}{dt}=n\cos\alpha\end{cases}$$
$$m=m'+m''(t'-t)$$
$$n=n'+n''(t'-t)$$

so wird:

$$\frac{d\alpha}{dt}=m'+n'\sin\alpha\, tg\,\delta+(m''+n''\sin\alpha\, tg\,\delta)(t'-t)$$
$$\frac{d\delta}{dt}=n'\cos\alpha+n''\cos\alpha\,(t'-t)$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = n' \sin\alpha \sec\delta^2 \frac{d\delta}{dt} + n' \cos\alpha\, tg\,\delta \frac{d\alpha}{dt} + m'' + n'' \sin\alpha\, tg\,\delta$$

$$\frac{d\delta}{dt} \text{ und } \frac{d\alpha}{dt}$$

eingeführt gibt:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{1}{2} n'^2 \sin 2\alpha\, tg\,\delta^2 + \frac{n' m'}{2} \cos\alpha\, tg\,\delta + \frac{n'^2}{4} \sin 2\alpha + \frac{m''}{2}$$
$$+ \frac{n''}{2} \sin\alpha\, tg\,\delta$$

ebenso

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\delta}{dt^2} = -\frac{n'^2}{2} \sin\alpha^2\, tg\,\delta - \frac{n' m'}{2} \sin\alpha + \frac{n''}{2} \cos\alpha$$

Bis zu den Gliedern der 2. Ordnung erhält man also

$$\alpha' = U + U'(t'-t) + U''(t'-t)^2$$
$$\delta' = W + W'(t'-t) + W''(t'-t)^2$$

wobei

$$U = \alpha$$

$$U' = \frac{d\alpha}{dt} = n' \sin\alpha\, tg\,\delta + m'$$

$$U'' = \frac{1}{2}\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{n'^2}{2} \sin 2\alpha\, tg\,\delta^2 + \frac{m' n'}{2} \cos\alpha\, tg\,\delta + \frac{n'^2}{4} \sin 2\alpha$$
$$+ \frac{m''}{2} + \frac{n''}{2} \sin\alpha\, tg\,\delta$$

$$W = \delta$$

$$W' = \frac{d\delta}{dt} = n' \cos\alpha$$

$$W'' = \frac{1}{2}\frac{d\delta}{dt} = -\frac{n'^2}{2} \sin\alpha^2\, tg\,\delta - \frac{n' m'}{2} \sin\alpha + \frac{n''}{2} \cos\alpha$$

$$\alpha_{,} = \alpha + \frac{d\alpha}{dt}(t'-t) + \tfrac{1}{2}\frac{d^2\alpha}{dt^2}(t'-t)^2$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= n \sin\alpha\, tg\,\delta + m \\ \frac{d\delta}{dt} &= n \cos\alpha \end{aligned}\right\}$$ Ist die jährliche Aenderung der AR und δ für das Jahr 1750 + t

Ist

$t' - t = 100$ so ist

$$100 \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \text{Variatio sæcularis.} = 200\, U'' \text{ für } AR$$
$$200\, W'' \text{ für } \delta$$

Man hat daher:

$$\alpha' = \alpha + (t'-t) \left\{ \frac{d\alpha}{dt} + \frac{(t'-t)}{2} \frac{200\, U''}{100} \right\}$$

$$\delta' = \delta + (t'-t)\left\{\frac{d\delta}{dt} + \frac{(t'-t)}{2}\frac{200\ W''}{100}\right\}$$

Beispiel. Für die Epoche 1840 ist für η der Plejaden (Alcyone)

$\alpha = 54^{0}\ 29'\ 46'',72$ Jährl. Präcess. $= 53'',191$; Variat Säcul. $+ 0,268$
$\delta = 23^{0}\ 36'\ 16''91$ „ „ $= 11'',648$ „ „ $- 0,427$

wie gross ist α' und δ' für den Anfang des Jahres 1861.

$\alpha' = 54^{0}\ 29'\ 46'',72 + 21\ \{53'',191 + 10,5 \, . \, 0'',00268\} = 54^{0}\ 48'\ 24'',32$

$\delta' = 23^{0}\ 36'\ 16'',91 + 21\ \{11'',648 - 10,5 \, . \, 0'',00427\} = 23^{0}\ 40'\ 20'',57$

Kennt man die Präcession und säculare Aenderung des Sterns nicht, sondern nur seinen Ort z. B. für 1840 und soll den für 1861 berechnen, so suche man die Präcession für die Zeit $\frac{t'+t}{2}$ und rechne mit dieser den verlangten Ort.

Gegeben Anfang 1840

$\alpha = 54^{0}\ 29'\ 46'',72$
$\delta = 23^{0}\ 36'\ 16'',91$

Rechenschema.

m	$\log n\ tg\ \delta$	$\log n$
$n \sin \alpha\ tg\ \delta$	$\log \sin \alpha$	$\log \cos \alpha$
Präc. AR		Präc. δ

Man interpolire aus Formeln (3*) für 1850 den Werth von m und n.

$m = 46'',02824 + 0'',02778 = 46'',056$
$n = 20'',06442 - 0'',00693 = 20'',058$

46'',056	0,94275	1,30228
+ 7'',135	9,91067	9,76399
Präc. $AR = 53'',191$		Präc. $\delta = + 11'',648$

Mit dieser Präcession rechne man den Ort 1850,5 man erhält:

$\alpha = 54^{0}\ 39'\ 5'',226$
$\delta = 23^{0}\ 38'\ 19'',216$

Man interpolire m und n für 1850,5, so ist

$m = 46'',059$
$\log n = 1,30222$

46'',059	0,94339	1,30222
+ 7,159	9.91150	9,76234
Für 1850,5 Präc. $AR = 53'',218$		Präc. $\delta = + 11'',603$

Ort von Alcyone Epoche 1861,0

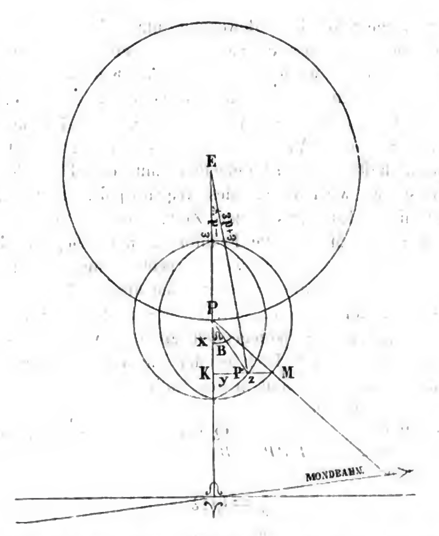
$$\alpha' = 54^\circ 29' 46'',72 + 21 . 53'',218 = 54^\circ 48' 24'',31$$
$$\delta' = 23^\circ 36' 16'',91 + 21 . 11'',603 = 23^\circ 40' 20'',57$$

Um den **mittleren Ort** dieses Sterns zu erhalten für die Epoche 1861,0 hat man die mit der Zeit proportional fortschreitende Eigenbewegung desselben hinzuzufügen, diese beträgt von 1840,0 bis 1861,0

$$\text{in } \alpha = + 21 . 0'',021 = + 0'',441$$
$$\text{in } \delta = - 21 . 0'',068 = - 1'',428$$

II. Nutation.

Bewegte sich der Mond wie die Sonne in der Ebene der Ekliptik, so wäre die anziehende Wirkung desselben auf die Erde eine constante. Nun aber hat die Mondbahn zur Erdbahn eine Neigung von etwa 5° 9′ und die Durchschnittspunkte (Knoten) beider Bahnen gehen auf der Ekliptik rückwärts. Die Neigung der Mondbahn gegen den Aequator ist also veränderlich und schwankt zwischen 18° 19′ und 28° 37′, die Periode dieser Veränderung währt etwa 18 Jahre. Der Antheil, den also der Mond an der Lunisolarpräcession hat, ist kein constanter, sondern hängt von der Länge des Mondknotens ab, denn die Beobachtungen haben gezeigt, dass die Länge aller Sterne um eine Grösse abnimmt, die proportional ist dem *sinus* des Mondknotens, die Schiefe der Ekliptik aber eine Veränderung erleidet, die dem *cosinus* dieses Knotens entspricht. Wenn man unter Lunisolarpräcession die Summe der constanten Wirkungen der Sonne und des Mondes versteht, so nennt man diese Veränderung des Aequators um die als ruhend angenommene Ekliptik, hervorgerufen durch die veränderliche Neigung der Mondbahn zum Erdäquator, die **Nutation**.



Durch obenstehende Figur lässt sich die Wirkung der Nutation graphisch darstellen.

Es sei *E* der Pol der Ekliptik, *P* der Pol des Aequators. Um den Pol der Ekliptik sei durch den Pol des Aequators gehend ein Kreis gezogen, der Radius dieses Kreises sei ε oder die Schiefe der Ekliptik. Ferner denke man sich den Pol *P* des Aequators als den Mittelpunkt einer Ellipse, deren grosse Axe $2a = 18'',45$ den Breitekreis des Pols berührt, und deren kleine Axe $2b = 13'',62$ auf diesem Breitekreis senkrecht steht. Dieser Mittelpunkt der Ellipse ist der mittlere Ort des Pol's. Die Länge des wahren Pols, der in der Periferie der Ellipse liegt, wird so bestimmt:

Man beschreibe mit der halben grossen Axe einen Kreis um *P* und denke sich den Halbmesser dieses Krei-

ses in gleichförmiger Bewegung um seinen Mittelpunkt und zwar so, dass er mit der grossen Axe der Ellipse zusammenfällt, wenn der aufsteigende Knoten der Mondbahn mit dem Frühlingsnachtgleichepunkt zusammenfällt. Zieht man alsdann vom Endpunkte M dieses Halbmessers auf die grosse Axe die Senkrechte MK, so ist der Durchschnittspunkt P' derselben mit der Periferie der Ellipse der wahre Ort des Aequatorpols. Der Winkel, den dieser Halbmesser zur Zeit, wo der aufsteigende Knoten des Mondes im Frühlingsnachtgleichepunkt liegt, mit der Ekliptik bildet, ist ein rechter, und da die Bewegung dieses Halbmessers und die des mittlern Knotens eine gleichförmige ist, so wird der Halbmesser mit der der Ekliptik zunächstliegenden grossen Axe stets einen Winkel bilden, der gleich ist der Länge des aufsteigenden Knotens der Mondbahn in der Ekliptik.

Man hat also:

wenn $MK = z$ $\sphericalangle MPK = \Omega$ Länge des aufsteigenden Knotens
$P'K = y$ $\sphericalangle KPP' = B$
$PK = x$

$$\frac{z}{x} = tg\,\Omega$$

$$\frac{y}{x} = tg\,B$$

$$tg\,B = \frac{y}{z}\,tg\,\Omega \text{ und da}$$

$$\frac{y}{z} = \frac{b}{a} \text{ so ist}$$

$$tg\,B = \frac{b}{a}\,\frac{\sin\Omega}{\cos\Omega} = \frac{y}{x} \text{ eine Gleichung die erfüllt wird}$$

$$\text{wenn } \left.\begin{aligned} y &= b\sin\Omega \\ x &= a\cos\Omega \end{aligned}\right\} (1)$$

Verbindet man die Endpunkte von y mit dem Pol der Ekliptik, so ist im

$$\triangle\, P'EK$$
$$EK = \varepsilon + x$$
$$KP' = y$$
$$EP' = \varepsilon + d\varepsilon$$

Aus diesem $\triangle\, P'EK$ lässt sich die durch die Nutation bewirkte $-\,d\psi$ und $d\varepsilon$ annähernd berechnen, denn es ist:

$$\cos(\varepsilon + d\varepsilon) = \cos y \cos(\varepsilon + x)$$

$$tg\, d\psi = -\frac{tg\, y}{\sin(\varepsilon + x)}$$

Da aber x, y, $d\varepsilon$ sehr kleine Werthe haben, so kann man auch setzen:

$$\varepsilon + d\varepsilon = x + \varepsilon$$

$$\left.\begin{aligned} d\varepsilon &= x = a \cos \Omega \\ d\psi &= -\frac{y}{\sin\varepsilon} = -\frac{b \sin \Omega}{\sin \varepsilon} \end{aligned}\right\} (2)$$

Peters gibt folgende Werthe für $\triangle\psi$ und $\triangle\varepsilon$ wenn:

☊ die mittlere Länge des Mondknotens
⊙ die wahre Länge der Sonne
☾ die mittlere Länge des Mondes
Γ die wahre Länge des Perigäums der Sonne, ist

$$\triangle\psi = -17'',2405 \sin \Omega + 0'',2073 \sin 2\Omega - 1'',2694 \sin 2 ⊙ - 0'',2041 \sin 2 ☾ + 0,''1279 \sin(⊙ - \Gamma) - 0'',0213 \sin(⊙ + \Gamma)$$

$$\triangle\varepsilon = +9'',2231 \cos\Omega - 0'',0886 \cos 2\Omega + 0'',5510 \cos 2 ⊙ + 0'',0886 \cos 2 ☾ + 0,0093 \cos(⊙ + \Gamma)$$

Der mit cos ☊ multiplicirte Coefficent $+ 9'',2231$ heisst die Nutations-Constante; das Glied, das von der doppelten Sonnenlänge herrührt, heisst Solarnutation.

Nutation in Rectascension und Declination.

Es seien α, δ, ε, λ, β die auf das mittlere Aequinoctium bezogenen Grössen.

α' δ' ε' λ' β' die auf das wahre Aequinoctium bezogenen.

Um die Grösse α' δ' aus den gegebenen α, δ zu bestimmen suche man zuerst die λ, β des Sterns in Beziehung auf die Ekliptik, wodurch man hat:

$$\cos\delta \cos\alpha = \cos\beta \cos\lambda$$

$$\cos\delta \sin\alpha = \cos\beta \sin\lambda \cos\varepsilon - \sin\beta \sin\varepsilon$$

$$\sin\delta = \cos\beta \sin\lambda \sin\varepsilon + \sin\beta \cos\varepsilon$$

Bezieht man den Ort des Sterns auf die wahre Ekliptik, so ändert sich α, δ, λ, β, ε in α', δ', $\lambda + \triangle\psi$, $\varepsilon + \triangle\varepsilon$, β, dadurch hat man:

$$\cos\delta' \cos\alpha' = \cos\beta \cos(\lambda + \triangle\psi)$$

$$\cos\delta' \sin\alpha' = \cos\beta \sin(\lambda + \triangle\psi)\cos(\varepsilon + \triangle\varepsilon) - \sin\beta \sin(\varepsilon + \triangle\varepsilon)$$

$$\sin\delta' = \cos\beta \sin(\lambda + \triangle\psi)\sin(\varepsilon + \triangle\varepsilon) + \sin\beta \cos(\varepsilon + \triangle\varepsilon)$$

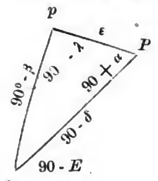
Durch diese 2 Systeme von Gleichungen lässt sich die Aufgabe lösen. Da die Einwirkung der Nutation in Länge auf etwa 20″ in Breite nur bis auf etwa 10″ geht, so kann man ohne bedeutende Fehler diese Gleichungen bis zu den Gliedern der 2ten Ordnung entwickeln.

Die Taylor'sche Reihe gibt alsdann:

$$\alpha' - \alpha = \frac{d\alpha}{d\lambda} \triangle \psi + \frac{d\alpha}{d\varepsilon} \triangle \varepsilon$$

$$\delta' - \delta = \frac{d\delta}{d\lambda} \triangle \psi + \frac{d\delta}{d\varepsilon} \triangle \varepsilon$$

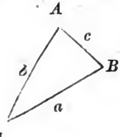
Aus $\triangle\, pPs$ folgt:



$$\cos\beta \cos E = \sin\varepsilon \cos\alpha$$

$$\cos\beta \sin E = \cos\varepsilon \cos\delta + \sin\varepsilon \sin\delta \sin\alpha$$

Wendet man die Differentialgleichungen der sphärischen Trigonometrie nämlich:



$$\sin a\, dB = \sin C\, db - \sin B \cos a\, dc + \sin b \cos C\, dA$$

$$da = \cos C\, db + \cos B\, dc + \sin b \sin C\, dA$$

auf obiges $\triangle\, spP$ an, so ist:

$$\cos\delta\, d\alpha = -\cos E\, d\beta + \sin E \cos\beta\, d\lambda - \cos\alpha \sin\delta\, d\varepsilon$$

$$d\delta = \sin E\, d\beta + \cos E \cos\beta\, d\lambda + \sin\alpha\, d\varepsilon$$

Die partiellen Differentialgleichungen werden alsdann:

$$\frac{d\alpha}{d\lambda} = \frac{\sin E \cos\beta}{\cos\delta} = \cos\varepsilon + \sin\varepsilon \sin\alpha\, tg\,\delta = \sin\varepsilon \{\text{cotg}\,\varepsilon + \sin\alpha\, tg\,\delta\}$$

$$\frac{d\alpha}{d\varepsilon} = -\cos\alpha\, tg\,\delta$$

$$\frac{d\delta}{d\lambda} = \cos E \cos\beta = \sin\varepsilon \cos\alpha$$

$$\frac{d\delta}{d\varepsilon} = \sin\alpha$$

Diese Werthe in obigen Reihen eingeführt gibt:

$$\alpha' - \alpha = \sin\varepsilon \left\{ \operatorname{cotg}\varepsilon + \sin\alpha \, tg\,\delta \right\} \triangle\psi - \cos\alpha \, tg\,\delta \, \triangle\varepsilon$$

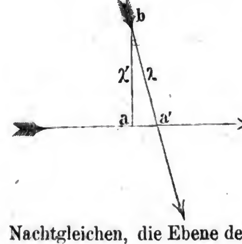
$$\delta' - \delta = \sin\varepsilon \cos\alpha \, \triangle\psi + \sin\alpha \, \triangle\varepsilon$$

Führt man für $\triangle\psi$ und $\triangle\varepsilon$ die vorigen Werthe ein, und setzt für 1800 $\varepsilon = 23^0\ 27'\ 54'',8$ so erhält man:

$$\begin{aligned}
\alpha' - \alpha = &- 15'',8148 \sin \text{☊} - \{ 6'',8650 \sin\alpha \sin \text{☊} \\
&\qquad + 9'',2231 \cos\alpha \cos \text{☊} \} \, tg\,\delta \\
&+ 0'',1903 \sin 2\,\text{☊} + \{ 0'',0822 \sin\alpha \sin 2\,\text{☊} \\
&\qquad 0'',0896 \cos\alpha \cos 2\,\text{☊} \} \, tg\,\delta \\
&- 1'',1642 \sin 2\odot - \{ 0'',5054 \sin\alpha \sin 2\odot \\
&\qquad + 0'',5509 \cos\alpha \cos 2\odot \} \, tg\,\delta \\
&- 0'',1872 \sin 2\,\text{☾} - \{ 0'',0813 \sin\alpha \sin 2\,\text{☾} \\
&\qquad + 0'',0886 \cos\alpha \cos 2\,\text{☾} \} \, tg\,\delta \\
&+ 0'',1173 \sin(\odot - \Gamma) + 0'',0509 \sin(\odot - \Gamma) \, tg\,\delta \\
&- 0'',0195 \sin(\odot + \Gamma) - 0'',0085 \sin\alpha \sin(\odot \quad \Gamma)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta' - \delta = &- 6'',8650 \cos\alpha \sin \text{☊} + 9'',2231 \sin\alpha \cos \text{☊} \\
&+ 0'',0822 \cos\alpha \sin 2\,\text{☊} - 0'',0896 \sin\alpha \cos 2\,\text{☊} \\
&- 0'',5054 \cos\alpha \sin 2\odot + 0'',5509 \sin\alpha \cos 2\odot \\
&- 0'',0813 \cos a \sin 2\,\text{☾} + 0,0886 \sin\alpha \cos 2\,\text{☾} \\
&+ 0'',0509 \cos\alpha \sin(\odot - \Gamma) \\
&- 0'',0085 \cos\alpha \sin(\odot + \Gamma) + 0'',0093 \sin\alpha \cos(\odot + \Gamma)
\end{aligned}$$

III. Aberration in Rectascension und Declination.



Man beziehe die Punkte a, a', b auf die 3 Axen eines Coordinatensystems, dessen Anfangspunkt in einem unbeweglichen Punkte des Raumes liegt.

Die Ebene der $X\,Y$ sei der Aequator, die der $X\,Z$ die Colur der Tag- und Nachtgleichen, die Ebene der $Y\,Z$ die Colur der Solstitien.

Die Coordinaten des Punktes a' seien x, y, z .
„ „ b „ x', y', z'

Befindet sich das Lichtmolecül zur Beobachtungszeit t in a' und war t' die Zeit, in der es sich in b befand, so sind, wenn $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ die lineären Geschwindigkeiten des Lichts, zerlegt nach den 3 Axen der Rectascension und Declination bedeuten:

Die Coordinaten des Punktes a

$$x - \frac{dx}{dt}(t - t')$$

$$y - \frac{dy}{dt}(t - t')$$

$$z - \frac{dz}{dt}(t - t')$$

Die Projection von a' b auf die Axe

$$\text{der } X = x' - x$$
$$Y = y' - y$$
$$Z = z' - z$$

Sind also die Coordinaten von a' b $= \alpha$ und δ und die Länge von a' $b = \lambda$, so ist:

$$x' - x = \lambda \cos \delta \cos \alpha$$
$$y' - y = \lambda \cos \delta \sin \alpha$$
$$z' - z = \lambda \sin \delta$$

Die Projection von ab auf die Axe

$$\text{der } X = x' - x + \frac{dx}{dt}(t - t')$$

$$Y = y' - y + \frac{dy}{dt}(t - t')$$

$$Z = z' - z + \frac{dz}{dt}(t - t')$$

Sind also die Coordinate von $ab = \alpha'$ und δ' und λ' die Länge von ab, so ist:

$$\left.\begin{aligned} x' - x + \frac{dx}{dt}(t - t') &= \lambda' \cos \delta' \cos \alpha' \\ y' - y + \frac{dy}{dt}(t - t') &= \lambda' \cos \delta' \sin \alpha' \\ z' - z + \frac{dz}{dt}(t - t') &= \lambda' \sin \delta' \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Bezeichnet man mit k die Zeit, die das Licht braucht, um die Entfernung der Sonne von der Erde zu durch-

laufen und ist λ und λ' in Theilen der mittlern Entfernung der Erde von der Sonne gegeben, so ist:

$$t - t' = k \text{ und}$$
$$\lambda' = \lambda L,$$

wo L eine Grösse bedeutet, die von 1 nur wenig verschieden ist.

Diese Werthe in (1) eingeführt gibt:

$$\lambda \cos\alpha \cos\delta + k\lambda \frac{dx}{dt} = \lambda L \cos\delta' \cos\alpha'$$
$$\lambda \cos\delta \sin\alpha + k\lambda \frac{dy}{dt} = \lambda L \cos\delta' \sin\alpha$$
$$\lambda \sin\delta \qquad + k\lambda \frac{dz}{dt} = \lambda L \sin\delta$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} L \cos\delta' \cos\alpha' &= \cos\alpha \cos\delta + k \frac{dx}{dt} \\ L \cos\delta' \sin\alpha' &= \sin\alpha \cos\delta + k \frac{dy}{dt} \\ L \sin\delta' &= \sin\delta \qquad + k \frac{dz}{dt} \end{aligned}\right\} (2)$$

$k\frac{dx}{dt}$, $k\frac{dy}{dt}$, $k\frac{dz}{dt}$ sind Grössen der 1ten Ordnung, die vom Verhältniss der Geschwindigkeit des Lichts und der der Erde abhängen.

Multiplicirt man 1 mit — sin α und 2 mit cos α
dann 1 mit cos α und 2 mit sin α
und addirt, so erhält man:

$$L \cos\delta' \sin(\alpha' - \alpha) = -k\left(\frac{dx}{dt}\sin\alpha - \frac{dy}{dt}\cos\alpha\right)$$
$$L \cos\delta' \cos(\alpha' - \alpha) = \cos\delta + k\left(\frac{dx}{dt}\cos\alpha + \frac{dy}{dt}\sin\alpha\right)$$

$$tg(\alpha' - \alpha) = \frac{-k\left(\frac{dx}{dt}\sin\alpha - \frac{dy}{dt}\cos\alpha\right)}{\cos\delta + k\left(\frac{dx}{dt}\cos\alpha + \frac{dy}{dt}\sin\alpha\right)}$$

$$tg(\alpha' - \alpha) = \frac{-k\sec\delta\left(\frac{dx}{dt}\sin\alpha + \frac{dy}{dt}\cos\alpha\right)}{1 + k\sec\delta\left(\frac{dx}{dt}\cos\alpha + \frac{dy}{dt}\sin\alpha\right)} \quad (a)$$

Die Gleichung (a) hat die Form

$$-\frac{km}{1+kn} = -km(1+kn)^{-1} = -km + k^2 mn - \ldots.$$

$$tg(\alpha' - \alpha) = \alpha' - \alpha - \tfrac{1}{3}(\alpha' - \alpha)^3 + \ldots\ldots$$

Beachtet man nur die Grössen der 1ten Ordnung, so hat man:

$$\alpha' - \alpha = -km \quad \text{oder}$$

$$\alpha' - \alpha = -k \sec\delta \left(\frac{dx}{dt}\sin\alpha - \frac{dy}{dt}\cos\alpha\right)$$

Aus (2) und (a) hat man:

$$\begin{cases} L\sin\delta' = \sin\delta + k\dfrac{dz}{dt} \\ L\cos\delta' = \dfrac{\cos\delta}{\cos(\alpha'-\alpha)} + \dfrac{k}{\cos(\alpha'-\alpha)}\left(\dfrac{dx}{dt}\cos\alpha + \dfrac{dy}{dt}\sin\alpha\right) \end{cases}$$

Multiplizirt man 1 mit $\cos\delta$, 2 mit $-\sin\delta$ alsdann
1 mit $\sin\delta$, 2 mit $\cos\delta$ so erhält man:

$$(\beta)\begin{cases} L\sin(\delta'-\delta) = \sin\delta\cos\delta\left(1 - \dfrac{1}{\cos(\alpha'-\alpha)}\right) - \dfrac{k\sin\delta}{\cos(\alpha'-\alpha)} \\ \qquad\left(\dfrac{dx}{dt}\cos\alpha + \dfrac{dy}{dt}\sin\alpha\right) + k\cos\delta\dfrac{dz}{dt} \\ L\cos(\delta'-\delta) = \dfrac{\cos\delta^2}{\cos(\alpha'-\alpha)} + \sin\delta^2 + \dfrac{k\cos\delta}{\cos(\alpha'-\alpha)} \\ \qquad\left(\dfrac{dx}{dt}\cos\alpha + \dfrac{dy}{dt}\sin\alpha\right) + k\sin\delta\dfrac{dz}{dt} \end{cases}$$

Es ist:

$$\frac{1}{\cos(\alpha'-\alpha)} \quad 1 - \tfrac{1}{2}(\alpha'-\alpha)^2 + \ldots\ldots$$

Beachtet man auch hier nur die Glieder der 1ten Ordnung, so ist:

$$(\gamma)\begin{cases} L\sin(\delta'-\delta) = -k\left\{\dfrac{dx}{dt}\sin\delta\cos\alpha + \dfrac{dy}{dt}\sin\delta\sin\alpha \right. \\ \qquad\left. + \dfrac{dz}{dt}\cos\delta\right\} \\ L\cos(\delta'-\delta) = 1 + k\left\{\dfrac{dx}{dt}\cos\delta\cos\alpha + \dfrac{dy}{dt}\cos\delta\sin\alpha \right. \\ \qquad\left. + \dfrac{dz}{dt}\sin\delta\right\} \end{cases}$$

Dividirt man die beiden Gleichungen (γ), so hat die rechte Seite die Form

$$\frac{-km}{1+kn} = -km + k^2 mn - \ldots.$$

$$tg\,(\delta' - \delta) = \delta' - \delta - \tfrac{1}{3}(\delta' - \delta)^3 + \ldots.$$

Man erhält also mit Berücksichtigung der Glieder der 1ten Ordnung

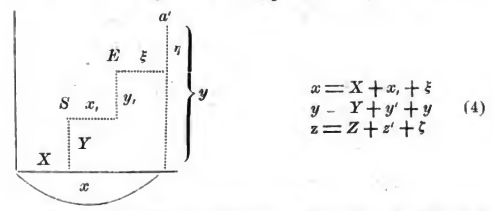
$$(3)\ \begin{cases} \delta' - \delta = -k \left\{ \dfrac{dx}{dt} \sin\delta \cos\alpha + \dfrac{dy}{dt} \sin\delta \sin\alpha + \dfrac{dz}{dt} \cos\delta \right\} \\ \alpha' - \alpha = -k \sec\delta \left\{ \dfrac{dx}{dt} \sin\alpha - \dfrac{dy}{dt} \cos\alpha \right\} \end{cases}$$

Es seien X, Y, Z die Coordinaten des Sonnenmittelpunktes bezogen auf das System des Aequators- und der Frühlingsnachtgleichen.

x, y, z die Coordinaten des Erdmittelpunktes bezogen auf den Sonnenmittelpunkt.

ξ, η, ζ Coordinaten des Auges bezogen auf den Erdmittelp.

X, Y, Z „ „ „ „ auf den Anfangsp. des Systems d. Aeq. u. Frühl., so ist:



$$\begin{aligned} x &= X + x_{,} + \xi \\ y &= Y + y' + y \\ z &= Z + z' + \zeta \end{aligned} \qquad (4)$$

Ist A und D die Rectesc. und Declin. der Erde bezogen auf den Sonnenmittelpunkt, und r ihre Entferuung von der ⊙, so ist:

$$\begin{aligned} x_{,} &= r \cos D \cos A \\ y_{,} &\ \ \ r \cos D \sin A \\ z_{,} &= r \sin D \end{aligned}$$

Bezeichnet man mit ⊙ die Länge der Sonne mit ε die Schiefe der Ekliptik und mit r die Entfernung der Sonne von der Erde, so ist:

$$\begin{aligned} r \cos D \cos A &= r \cos \odot \\ r \cos D \sin A &= r \cos \varepsilon \sin \odot \\ r \sin D &= r \sin \varepsilon \sin \odot \end{aligned}$$

Ist ρ = Entfernung des Auges vom Erdcentrum (lokaler Erdradius), ϑ und φ' die Rectasc. und Declin. des Auges bezogen auf das Erdcentrum, so ist:

$$\xi = \varrho \cos \vartheta \cos \varphi'$$
$$\eta = \varrho \sin \vartheta \cos \varphi'$$
$$\zeta = r \sin \varphi'$$

Führt man diese Werthe in (4) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} x &= X - r \cos \odot + \varrho \cos \vartheta \cos \varphi' \\ y &= Y - r \sin \odot \cos \varepsilon + \varrho \cos \varphi' \sin \vartheta \qquad (4^*) \\ z &= Z - r \sin \odot \sin \varepsilon + \varrho \sin \varphi' \end{aligned}$$

In den Gleichungen (4*) sind die Grössen r, $\odot$, ϑ veränderlich, ε, ρ und φ' constant.

Da die Grössen X, Y, Z, die aus der Eigenbewegung der Fixsterne beobachtet sind, von der Bewegung der Sonne abhängen, die sich vorerst nur als geradelinigt und gleichförmig zu erkennen gibt, so betrachten wir

$$\frac{dX}{dt}, \frac{dY}{dt}, \frac{dZ}{dt}$$

zwar als unbekannte aber als constante Grössen, deren Einfluss sich nicht in Rechnung ziehen lässt. Ebenso lassen wir die Glieder, die von ξ, η, ζ also von der Sternzeit abhängen, ihrer Kleinheit wegen weg, so dass sich die Gleichungen 4* auf folgende reduciren.

$$\left.\begin{aligned} x &= - r \cos \odot \\ y &= - r \sin \odot \cos \varepsilon \\ z &= - r \sin \odot \sin \varepsilon \end{aligned}\right\} 4^{**}$$

Durch Differentiation erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= r \sin \odot \frac{d\odot}{dt} - \cos \odot \frac{dr}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= - r \cos \odot \cos \varepsilon \frac{d\odot}{dt} - \sin \odot \cos \varepsilon \frac{dr}{dt} \\ \frac{dz}{dt} &= - r \cos \odot \sin \varepsilon \frac{d\odot}{dt} - \sin \odot \sin \varepsilon \frac{dr}{dt} \end{aligned}\right\} (5)$$

Nennt man:

$P =$ Länge der Sonne zu Zeit des Perigäums,
$180^0 \quad P =$ Heliocentrische Länge der Perigäums der Sonne,
$\odot - P = v =$ wahre Anomalie,
$R =$ mittlere Entfernung der Sonne,
$e =$ Excentricität der Bahn in Theilen der grossen Axe,
$p = R(1 - e^2) =$ halber Bahnparameter,
$m =$ Masse der Erde ausdrückt in Theilen der Sonnenmasse,
$T =$ wahre (siderische) Umlaufszeit der Erde,

so geben die erweiterten Kepler'schen Gesetze:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k\sqrt{p}\,\sqrt{1+m}}{r^2} = \text{Winkelgeschwindigkeit.}$$

$$T^2 = \left(\frac{360^0}{k}\right)^2 \cdot \frac{R^3}{1+m}$$

Nennt man μ die tägliche Bewegung der Erde und ist T in Tagen gegeben, so ist:

$$\mu T = 360^0$$

$$\mu = \frac{360}{T}\text{ Tage} = \frac{129600}{T}\text{ Sekunden also}$$

$$\mu = \frac{k\sqrt{1+m}}{R^{3/2}}\text{; dadurch wird}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\mu\sqrt{p}}{r^2 R^{3/2}} = \frac{\mu R^{3/2} R^{1/2}\sqrt{(1-e^2)}}{r^2} = \frac{R^2\sqrt{(1-e^2)}\,\mu}{r^2}$$

$$\frac{dr}{r} = \frac{e \sin v\, dv}{1 + e \cos v}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{e r \sin v}{1 + e \cos v}\frac{dv}{dt} = \frac{e \sin v\, R^2\sqrt{(1-e^2)}\,\mu}{r\,(1 + e\cos v)}$$

$$= \frac{e \sin v\, R^2\sqrt{(1-e^2)}\,\mu}{p} = \frac{e \sin R^2\sqrt{(1-e^2)}\,\mu}{R\,(1-e^2)}\text{ also ist}$$

$$\frac{dr}{dt} = R\frac{\sin v\, e}{\sqrt{(1-e^2)}}\mu = R\sin(\odot - P)\frac{e}{\sqrt{(1-e^2)}}\mu$$

wird $R = 1$ gesetzt, so ist:

$$\frac{dr}{dt} = \sin(\odot - P)\frac{e}{\sqrt{(1-e^2)}}\mu$$

Ferner folgt aus:

$$v = \odot - P$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\odot}{dt}\text{ und}$$

$$\frac{r\,d\odot}{dt} = \frac{\sqrt{(1-e^2)}}{r}\mu\text{ oder da } r = \frac{1-e^2}{1 + e\cos v}\text{ ist auch:}$$

$$(6)\quad\begin{cases}\dfrac{r\,d\odot}{dt} = \dfrac{1 + e\cos(\odot - P)}{\sqrt{(1-e^2)}}\mu\\[2ex]\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{e\sin(\odot - P)}{\sqrt{(1-e^2)}}\mu\end{cases}$$

Führt man diese Werthe in die Gleichungen (5) ein, so erhält man:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = \left\{\sin\odot + e\sin\odot\cos(\odot - P) - e\cos\odot\sin(\odot - P)\right\}\frac{\mu}{\sqrt{(1-e^2)}}$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)=\left\{-\cos\odot-e\cos\odot\cos(\odot-P)-e\sin\odot\sin(\odot-P)\right\}\frac{\mu\cos\varepsilon}{\sqrt{(1-e^2)}}$$

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)=\left\{-\cos\odot-e\cos\odot\cos(\odot-P)-e\sin\odot\sin(\odot-P)\right\}\frac{\mu\sin\varepsilon}{\sqrt{(1-e^2)}}$$

oder:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{dx}{dt}\right)&=\frac{\mu}{\sqrt{(1-e^2)}}\left\{\sin\odot+e\sin P\right\}\\ \left(\frac{dy}{dt}\right)&=\frac{-\mu\cos\varepsilon}{\sqrt{(1-e^2)}}\left\{\cos\odot+e\cos P\right\}\\ \left(\frac{dz}{dt}\right)&=\frac{-\mu\sin\varepsilon}{\sqrt{(1-e^2)}}\left\{\cos\odot+e\cos P\right\}\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

Der Theil dieser Differentialquotienten, der vom Argumente P abhängt, also constant ist, fällt nach dem Vorigen weg und es bleibt noch der von der Länge der Sonne abhängige Theil, der eine jährliche Periode hat, übrig. Er heisst desshalb auch die jährliche Aberration.

Man erhält also für die Differentialquotienten

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{\mu\sin\odot}{\sqrt{(1-e^2)}}$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{-\mu\cos\varepsilon\cos\odot}{\sqrt{(1-e^2)}}$$

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)=\frac{-\mu\sin\varepsilon\cos\odot}{\sqrt{(1-e^2)}}$$

Setzt man

$$\varkappa = \frac{k\mu}{\sqrt{(1-e^2)}}$$

so ist nach Struve's Beobachtungen am Passageninstrument im ersten Vertikal

$$\varkappa = 497'',8 \quad = \frac{497,8}{86400}\ \text{Tage}$$

$$e = 0,01677$$

und daraus

$$\varkappa = 20'',4451\ \text{(Aberrationsconstante)}$$

Diese Werthe in Gleichungen (3) eingeführt gibt:

$$\alpha'-\alpha = -\varkappa\sec\delta\left\{\cos\odot\cos\varepsilon\cos\alpha+\sin\odot\sin\alpha\right\}$$

$$\delta'-\delta = -\varkappa\left\{\cos\odot(\cos\varepsilon\sin\alpha\sin\delta-\cos\delta\sin\varepsilon)-\sin\odot\cdot\cos\alpha\sin\delta\right\}$$

Man erhält also als jährliche Aberration in AR und δ:

$$\left.\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= -20'',4451 \sec\delta \,\{\cos\odot \cos\alpha \cos\varepsilon + \sin\odot \sin\alpha\} \\ \delta' - \delta &= +20'',4451 \cos\odot \{\sin\alpha \sin\delta \cos\varepsilon - \cos\delta \sin\varepsilon\} \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Für 1860 ist

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 23^\circ\, 27'\, 22'' \\ \log \sin\varepsilon &= 9,59993 \\ \log \cos\varepsilon &= 9,96254 \end{aligned}$$

Setzt man

$$\begin{aligned} -\varkappa \cos\odot \cos\varepsilon &= h \sin H \\ -\varkappa \sin\odot &= h \cos H \\ -\varkappa \cos\odot \sin\varepsilon &= i \end{aligned}$$

So wird:

$$\left.\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= h \sin(H + \alpha) \sec\delta \\ \delta' - \delta &= h \cos(H + \alpha) \sin\delta + i \cos\delta \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Das Berliner Jahrbuch gibt H, h, i für jeden 10ten Tag, und zwar seit 1861 mit der Struve'schen Aberrations-Constante.

IV. Mittlere und scheinbare Oerter der Sterne mit Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung.

α, δ seien die mittleren Oerter zu irgend einer Zeit,
α', δ' die scheinbaren Oerter zu einer andern Zeit, die von der 1ten um τ Jahre verschieden ist,

alsdann ist:

$\alpha' = \alpha$ + Präcession + Eigenbewegung + Nutation + jährliche Aberration.

$\alpha' = \delta$ = mittlere Rectascension.

(1) $+ \tau (m + n \sin\alpha \, tg\,\delta) + \tau\mu$ = Präcession + Eigenbewegung.

(2) $-(15'',8148 + 6'',8650 \sin\alpha \, tg\,\delta) \sin ☊$ für 1800; $15'',8321$ $6'',8683$ für 1900 ⎫

(3) $-\ 9'',2231 \cos\alpha \, tg\,\delta \cos ☊$; $9'',2240$ ⎭ + Hauptglieder der Lunar-Nutation.

(4) $+ (0'',1903 + 0'',0822 \sin\alpha\, tg\,\delta) \sin 2$ ☊
(5) $+ \; 0'',0896 \cos\alpha\, tg\,\delta \cos 2$ ☊
} + kleine Glieder der Lunar-Nutation.

(6) $- (1'',1644 + 0'',5055 \sin a\, tg\,\delta) \sin 2\odot$
$1'',1645 \quad 0'',5052$
(7) $- \; 0'',5510 \cos\alpha\, tg\,\delta \cos 2\odot$
$0'',5507$
} + Glieder der Sonnen-Nutation.

(8) $+ (0'',1173 + 0'',0509 \sin\alpha\, tg\,\delta) \sin(\odot - \Gamma)$
$0'',1170 \quad 0'',0507$
(9) $- (0'',0195 + 0'',0085 \sin\alpha\, tg\,\delta) \sin(\odot + \Gamma)$
(10) $- \; 0'',0093 \cos\alpha\, tg\,\delta \cos(\odot + \Gamma)$
} + Peters Glieder der Sonnen-Nutation.

(11) $- \; 20'',4451 \cos\varepsilon \cos\alpha\, cec\,\delta \cos\odot$
(12) $- \; 20'',4451 \sin\alpha \sec\delta \sin\odot$
} + Glieder der Aberration.

$\delta' = \delta$ Scheinbare δ = mittlere δ

(1) $+ \tau n \cos\alpha + \tau \mu'$ + Präcession + Eigenbewegung.

(2) $- 6'',8650 \cos\alpha \sin$ ☊
$6'',8683$
(3) $+ 9'',2231 \sin\alpha \cos$ ☊
$9'',2240$
} + Hauptglieder der Lunar-Nutation.

(4) $+ 0'',0822 \cos\alpha \sin 2$ ☊
(5) $- 0'',0896 \sin\alpha \cos 2$ ☊
} + kleine Glieder der Lunar-Nutation.

(6) $- 0'',5054 \cos\alpha \sin 2\odot$
$0'',5052$
(7) $+ 0'',5509 \sin\alpha \cos 2\odot$
$0'',5506$
} + Hauptglieder der Sonnen-Nutation.

(8) $+ 0'',0509 \cos\alpha \sin(\odot - \Gamma)$
$0'',0507$
(9) $- 0'',0085 \cos\alpha \sin(\odot + \Gamma)$
(10) $+ 0'',0093 \sin\alpha \cos(\odot + \Gamma)$
} + Peters Glieder der Sonnen-Nutation.

(11) $+ 20'',4451 (\sin\alpha \sin\delta \cos\varepsilon - \cos\delta \sin\varepsilon) \cos\odot$

Die Glieder, die von 2 ☾ abhängen, sind weggelassen, weil sie zu kleine Coefficienten und eine so kurze Periode haben, dass sie nicht bequem in Tafeln gebracht werden.

Setzt man:

	in AR	in δ
(2)	$(m' + n' \sin\alpha\, tg\,\delta) \sin$ ☊	$n' \cos\alpha \sin$ ☊
(4)	$(m'' + n'' \sin\alpha\, tg\,\delta) \sin 2$ ☊	$n'' \cos\alpha \sin 2$ ☊
(6)	$(m''' + n''' \sin\alpha\, tg\,\delta) \sin 2\odot$	$n''' \cos\alpha \sin 2\odot$

wo $n' = n i' \quad m' = m i' + h'$
$n'' = n i'' \quad m'' = m i'' + h''$
$n''' = n i''' \quad m''' = m i''' + h'''$
} wo i', i'', i''' eine absolute Zahl und h', h'', h''' der Rest in Sekunden ist.

So ist nach Wolfer's für

	1860		1880
$m =$	46″,06219		46″,06836
$n =$	20″,05375		20″,05189
$m' =$	15″,82518		15″,82864
$n' =$	6″,86698		6″,86764
$i' =$	0,34243		0,34249
$h' =$	0″,05217		0″,05047
$m'' =$		0,1903	
$n'' =$		0″,0822	
$i'' =$		0,00410	
$h'' =$		0″,0015	
$m''' =$	1″,16432		1″,16436
$n''' =$	0″,50528		0″,50524
$i''' =$	0,02520		0,02520
$h''' =$	0″,00372		0″,00369

Für die Glieder

(3) ist	$k' =$ 9″,22346		9″,22382
(5)	$k'' =$	0″,0896	
(7)	$k''' =$ 0,55072		0″,55066
(10)	k^{IV}	0″,0093	

Für die Glieder (8) und (9) ist für

	1800	1900
	$\Gamma =$ 279° 30′	281° 13′

Für 1800 wird also die Summe von (8) und (9)

in AR:

$$(0'',01614 + 0'',00700 \sin\alpha\, tg\,\delta) \sin \odot + (0'',13493 + 0'',05859 \sin\alpha\, tg\,\delta) \cos \odot$$

in δ:

$$+ 0'',00700 \cos\alpha \sin \odot + 0'',05859 \cos\alpha \cos \odot$$

oder

$(m^{IV} + n^{IV} \sin\alpha\, tg\,\delta) \sin \odot$ wobei n^{IV} $n i^{IV}$ m^{IV} $m i^{IV} + h^{IV}$

$(m^{V} + n^{V} \sin\alpha\, tg\,\delta) \cos \odot$ $\quad n^{V} = n i^{V}$ $\quad m^{V} = m i^{V} + h^{V}$

$\log i^{IV} = 6,54293$ $\qquad \log i^{V} = 7,46544$

$h^{IV} = 0'',00007$ $\qquad h^{V} = 0'',00041$

Vernachlässigt man diese kleine h^{IV} und h^{V}, so wird die Summe von (8) und (9)

in AR: $(i^{IV} \sin \odot + i^{V} \cos \odot)(m + n \sin\alpha\, tg\,\delta)$ $\qquad$ in δ: $(i^{IV} \sin \odot + i^{V} \cos \odot) n \cos\alpha$

setzt man $i^{IV} = f \cos \zeta$

$i^{V} = f \sin \zeta$ so ist

$f = 0,00295$

$\zeta = 83^{\circ}\, 11'$

also für 1800 $i^{IV} \sin \odot + i^{V} \cos \odot = 0{,}00295 \sin (\odot + 83^0\, 11')$
1900 $i^{IV} \sin \odot + i^{V} \cos \odot = 0{,}00293 \sin (\odot + 81^0\, 57')$

Setzt man die Coefficienten der Summe von (8) und (9) einander gleich, also:

$i^{IV} \sin (\odot + \zeta) = f \sin (\odot + \zeta)$, so ist für

1860	1880
$i^{IV} = 0{,}00294$	$i^{IV} = 0{,}00293$
$\zeta = 82^0\, 26'\, 36''$	$\zeta = 82^0\, 11'\, 48''$

Es sind also in AR die Glieder

(1) (2) (4) (6) (8 + 9) multiplicirt mit dem Faktor $m^x + n^x \sin \alpha \; tg\, \delta$
(3) (5) (7) (10) „ „ „ „ $\cos \alpha \; tg\, \delta$
(11) „ „ „ „ $\cos \alpha \sec \delta$
(12) „ „ „ „ $\sin \alpha \sec \delta$

In δ sind die Glieder

(1) (2) (4) (6) (8 + 9) multiplicirt mit dem Faktor $n^x \cos \alpha$
(3) (5) (7) (10) „ „ „ „ $-\sin \alpha$
(11) „ „ „ „ $tg\, \varepsilon \cos \delta - \sin \alpha \sin \delta$
(12) „ „ „ „ $\cos \alpha \sin \delta$

Dazu kömmt noch in AR und δ die Eigenbewegung.

Allgemein hat man also in

AR: $\tau \mu + m^x + n^x \sin \alpha \; tg\, \delta = i^x (m + n \sin \alpha \; tg\, \delta) + h^x$
δ: $\tau \mu' + n^x \cos a = i^x n \cos \alpha$

Führt man die vorigen Werthe ein, so ist:

$$\alpha' = \alpha + \tau \mu + (m + n \sin \alpha \; tg\, \delta) \left\{ \tau - i' \sin \Omega + i'' \sin 2 \Omega - i''' \sin 2 \odot + i\, i^{IV} \sin (\odot + \zeta) \right\}$$
$$- h' \sin \Omega + h'' \sin 2 - h''' \sin 2 \odot$$
$$+ \cos \alpha \; tg\, \delta \left\{ - k' \cos \Omega + k'' \cos 2 \Omega - k''' \cos 2 \odot - k^{IV} \cos (\odot + \Gamma) \right\}$$
$$- \cos \alpha \sec \delta \,.\, 29'',4451 \cos \varepsilon \cos \odot$$
$$- \sin \alpha \sec \delta \,.\, 20'',4451 \sin \odot$$

$$\delta' = \delta + \tau \mu' + n \cos \alpha \left\{ \tau - i' \sin \Omega + i'' \sin 2 \Omega - i''' \sin 2 \odot + i^{IV} \sin (\odot + \zeta) \right\}$$
$$- \sin \alpha \left\{ - k' \cos \Omega - k'' \cos 2 \Omega - k''' \cos 2 \odot - k^{IV} \cos (\odot + \Gamma) \right\}$$
$$- (tg\, \varepsilon \cos \delta - \sin \alpha \sin \delta)\, 20''.4451 \cos \varepsilon \cos \odot$$
$$- \cos \alpha \sin \delta \,.\, 20'',4451 \sin \odot$$

Setzt man

$A' = \tau - i''' \sin 2 \odot + i^{IV} \sin (\odot + \zeta)$ ... Periode von 1 Jahre, mit Ausnahme des τ, das sich mit der Zeit ändert.

$A'' = - i' \sin \Omega + i'' \sin 2 \Omega$ ...... Periode von 19 Jahren.

$$A = A' + A''$$

$B = -k''' \cos 2\odot - k^{IV} \cos(\odot + \Gamma)$ Periode von 1 Jahre.

$B'' = -k' \cos \Omega + k'' \cos 2\Omega$ Periode von nahe 19 Jahren.

$B = B' + B''$

$C = 20'',4451 \cos \varepsilon \cos \odot$ Periode von 1 Jahre.

$D = -20'',4451 \sin \odot$ Periode von 1 Jahre.

$$\begin{aligned} a &= m + n \sin \alpha \, tg\, \delta & a' &= n \cos \alpha \\ b &= \cos \alpha \, tg\, \delta & b' &= -\sin a \\ c &= \cos \alpha \sec \delta & c' &= tg\, \varepsilon \cos \delta - \sin \alpha \sin \delta \\ d & \quad \sin \alpha \sec \delta & d' &= \cos \alpha \sin \delta \end{aligned}$$

so ist:

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha + Aa + Bb + Cc + Dd + \tau\mu \\ \delta' & \quad \delta + Aa' + Bb' + Cc' + Dd' + \tau\mu' \end{aligned}$$

Die Grössen A, B, C, D können für alle Sterne im voraus berechnet werden, und sind im Berliner Jahrbuch in den Reductionstafeln mit der Aufschrift „Constanten für die Sterntage" im Logarithmus gegeben. Die Rechnung mit diesen Logarithmen ist besonders dann vortheilhaft, wenn die Grössen a, b, c, d, a', b', c', d' bekannt sind. Müssen diese aber zuerst aus den Formeln berechnet werden, so ist die Rechnung nach folgender Umformung bequemer.

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha & \quad Aa + Bb + Cc + Dd \\ \delta' - \delta & \quad Aa' + Bb' + Cc' + Dd' \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} a &= m + n \sin \alpha \, tg\, \delta & a' &= n \cos \alpha \\ b &= \cos \alpha \, tg\, \delta & b' &= -\sin a \\ c &= \cos a \sec \delta & c' &= tg\, \varepsilon \cos \delta - \sin \alpha \sin \delta \\ d &= \sin \alpha \sec \delta & d' &= \cos \alpha \sin \delta \end{aligned}$$

dadurch ist:

$$\alpha' - \alpha = Am + (An \sin \alpha + B \cos \alpha)\, tg\, \delta + (C \cos \alpha + D \sin \alpha) \sec \delta$$
$$\delta' - \delta = An \cos \alpha - B \sin \alpha + (D \cos \alpha - C \sin \alpha) \sin \delta + C\, tg\, \varepsilon \cos \delta$$

Man setzt:

$$\begin{aligned} Am &= f \\ An &= g \cos G \\ B &= g \sin G \\ D &= h \cos H \\ C &= h \sin H \\ C\, tg\, \varepsilon &= i \end{aligned}$$

Die Grössen f, g, G, h, H, i können für alle Sterne gleichzeitig voraus berechnet werden, und sind im Berliner

Jahrbuch in der Reductions-Tabelle: „Constanten für die mittlern Tage“ berechnet.

Die Formeln werden alsdann:

$$\alpha' - \alpha = f + g \sin(G + \alpha) \, tg\, \delta + h \sin(H + \alpha) \sec \delta$$
$$\delta' - \delta = g \cos(G + \alpha) + h \cos(H + \alpha) \sin \delta + i \cos \delta$$

Rechenschema.

Datum	log g	log h	log i
f	$\sphericalangle (G + \alpha)$	$H + \alpha$	$i \cos \delta$
$g \sin(G + \alpha) tg \delta$	$\log g \sin(G + \alpha)$	$\log h \sin(H + \alpha)$	$g \cos(H + \alpha)$
$h \sin(H + \alpha) \sec \delta$	$\log g \cos(G + \alpha)$	$\log h \cos(H + \alpha)$	$h \cos(H + \alpha) \sin \delta$
$\tau \mu$			$\tau \mu'$
Reduction der α			Reduction der δ

Beispiel.

Für die Epoche 1840,0 ist für η Plejaden (Acyone)

	Jährl. Präcession	Variat. Säcul.	
$\alpha = 54^\circ 29' 46'',72$	$+ 53'',191$	$+ 0,268$	$\mu = + 0'',021$
$\delta = 23^\circ 36' 16'',91$	$+ 11'',648$	$- 0'',427$	$\mu' = - 0'',068$

Man soll den scheinbaren Ort für 1861 Sept. 9. 8^h M. Z.

Für Epoche Januar 1861,0 mit Berücksichtigung der Eigenbewegung $\Big\}$ $\alpha = 54^\circ 48' 24'',761$ $\delta = 23^\circ 40' 19'',142$

Aus der Reductionstafel des Berliner Jahrbuchs erhält man für 1861 Sept. 9 8^h M. Z.

f	g	G	h	H	i
47'',66	20,86	353° 59'	18''85	104° 5'	7'',91

Sept. 9	1,31931	1,27531	0,89818
+ 47'',66	48° 47' 24'',761	158° 53' 24'',761	+ 7'',245
+ 6'',88	1,19571	0,83180	+ 13'',742
+ 7'',413	1,13807	1,24514$_n$	— 7'',061
+ 0'',0147			— 0'',0476
+ 1' 1'',9677			+ 13'',8784

Daher ist der scheinbare Ort für η Plejaden 1861 Septb. 9 8^h M. Z.

$$\alpha = 54^\circ 49' 26'',728$$
$$\delta = 23^\circ 40' 33'',020$$

V. Das Kreis- und Ringmikrometer.

Das Kreismikrometer in seiner einfachsten Gestalt besteht aus einem kreisrund ausgedrehten Diaphragma, das im Brennpunkte des Objectivglases des Fernrohrs befestigt ist. Die Mikrometer, wie sie jetzt im Gebrauche sind, bestehen aus einem Stahlringe, der auf einer Glasplatte aufgekittet oder in dieselbe eingeschliffen ist, und heissen alsdann Ringmikrometer. Die Position eines Gestirns ist durch die Bestimmung seiner Coordinaten in Rectascension und in Declination bekannt. Die Beobachtung mit diesem Mikrometer besteht nun darin, dass man das zu bestimmende Object mit einem Sterne vergleicht, dessen Position man kennt. Man beobachtet alsdann die Ein- und Austrittszeiten des Sterns und die des Objects an den Rändern des Rings, und findet daraus sowohl α als δ des zu bestimmenden Gegenstandes.

Die Vortheile mit diesem Mikrometer zu beobachten sind besonders folgende:

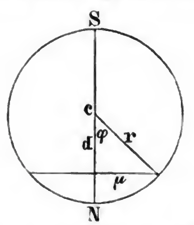
1) Man sieht die zu beobachtenden Objecte schon vorher im Gesichtsfeld, ehe sie in den Ring eintreten, wird also im Moment der Beobachtung nicht überrascht.
2) Man kann schon vor der Beobachtung Vorkehrungen treffen, damit die Sterne an der gewünschten Stelle in den Ring eintreten.
3) Bei jedem Sterndurchgang erhält man die doppelte Anzahl von Beobachtungen, indem man sowohl am äussern als am innern Kreis des Rings beobachtet.
4) Eine Menge von Fehlerquellen, die theils von Irridation, theils von der unregelmässigen Gestalt, wie dies z. B. bei Cometen und Nebelflecken der Fall ist, herrühren, wirken an dem äussern und innern Rand mit entgegengesetzten Zeichen und heben sich desshalb grösstentheils auf.
5) Das Kreis- wie Ringmikrometer kann bei allen Fernröhren angewandt werden, und die ganze op-

tische Kraft des Instruments kommt dabei in Anwendung, weil keine Beleuchtung des Gesichtsfeldes nöthig ist.

6) Das Fernrohr verlangt keine parallaktische Aufstellung und bedarf keine weitere Orientirung nach Pol und Zenith, steht also überall richtig, wenn dasselbe keinen Erschütterungen ausgesetzt ist.

a. Theorie des Kreismikrometers.

Wir legen zuerst dabei folgende Hypothese zu Grunde:



Jedes Gestirn beschreibt einen Parallelkreis, was wegen der Refraction und Eigenbewegung nicht der Fall ist. Die kleinen Sehnen, welche vom Stern beschrieben werden, sollen nicht vom grössten Kreise abweichen. Die Uhr soll genau Sternzeit gehen.

Ist nun r der Radius des Kreises,
i die Eintrittszeit des Sterns in den Kreis,
e die Austrittszeit desselben,
μ die halbe Chorde, die der Stern beschreibt,
gelten ferner für das 2te Gestirn dieselben Bezeichnungen nur gestrichen, und ist
T die Zeit, wann der Stern durch den Declinationskreis der Mitte des Gesichtsfeldes geht,
d der kürzeste Abstand der Sehne vom Mittel punkte des Kreises, so ist:

$$T = \frac{e+i}{2}$$

Die Grösse μ findet man durch folgende Betrachtung:

Geht die Linie $AB = \mu$ durch irgend einen festen Declinationskreis z. B. durch den Meridian und ist t die dazu nöthige Zeit, so ist $\sphericalangle\, BPA = 15\,t$, im sphärischen $\triangle\, BPA$ hat man alsdann:

$$\cos\mu = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos 15\,t$$
$$1 - 2\sin \tfrac{1}{2}\mu^2 = \cos a \cos b + \sin a \sin b - 2 \sin a \sin b \sin \tfrac{1}{2}\, 15\,t^2$$
$$1 - 2\sin \tfrac{1}{2}\mu^2 = \cos (a - b) - 2 \sin a \sin b \sin \tfrac{1}{2}\, 15\,t^2$$
$$1 - 2\sin \tfrac{1}{2}\mu^2 = 1 - 2 \sin \tfrac{1}{2}(a - b)^2 - 2 \sin a \sin b \sin \tfrac{1}{2}\, 15\,t^2$$
$$\sin \tfrac{1}{2}\mu^2 = \sin \tfrac{1}{2}(a - b)^2 - \sin a \sin b \sin \tfrac{1}{2}\, 15\,t^2$$

Ist P der Pol, so ist $a = 90^0 - \delta$; $b = 90^0 - \delta'$, für unsere Betrachtung kann man $\delta = \delta'$ setzen, wodurch man hat:

$$\sin \tfrac{1}{2}\mu^2 = \cos\delta^2 \sin \tfrac{1}{2}\, 15\,t^2$$

Und da die Entfernung μ sehr klein ist, kann man auch setzen:

$$\mu = 15\,t \, . \cos\delta$$

Für unsern speciellen Fall ist also:

$\mu = 15\, \frac{e - i}{2} \cos\delta$ in Bogensecunden,

$d = \sqrt{(r^2 - \mu^2)}$ wobei d $\frac{\text{positiv}}{\text{negativ}}$ wenn der Stern $\frac{\text{nördlich}}{\text{südlich}}$ vom Mittelpunkte des Mikrometers durchgeht.

Für beide Sterne hat man also:

$$T = \frac{e + i}{2}$$
$$T' = \frac{e' + i'}{2}$$
$$T' - T = \alpha_, - \alpha$$

$$\mu = 15\, \frac{e - i}{2} \cos\delta$$
$$\mu_, = 15\, \frac{e - i}{2} \cos\delta'$$
$$d = \sqrt{(r^2 - \mu^2)}$$
$$d_, = \sqrt{(r^2 - \mu_,^2)}$$
$$d_, - d = \delta' - \delta$$

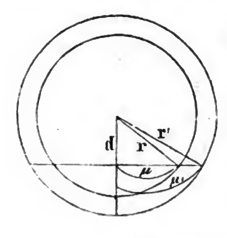
Für δ' genügt ein Näherungswerth, wenn die Declinationsdifferenz nicht zu gross ist, der sich leicht während des Durchgangs schätzen lässt.

Nennt man den Winkel bei c nämlich φ, den Positionswinkel des Eintritts, so ist:

$$\mu = r \sin \varphi \qquad \text{und} \qquad \mu_{,} = r \sin \varphi_{,}$$
$$d = r \cos \varphi \qquad\qquad d_{,} \quad r \cos \varphi_{,}$$

b. Theorie des Ringmikrometers.

Wir nehmen an, dass die Mittelpunkte beider Ringe zusammenfallen, und es sei:



r' Radius des äussern Rings,
r Radius des innern Rings,
$\mu_{,}$ und μ die reducirte halbe Chorden,
$d = d_{,}$ Abstand der Chorden vom Mittelpunkt,
i das Mittel der Eintritts-
e das der Austrittszeiten,
so ist:

$$d^2 = r'^2 - \mu_{,}^2 = r^2 - \mu^2 \qquad (\alpha)$$
$$r'^2 - r^2 = \mu_{,}^2 - \mu^2 \qquad (\beta)$$
$$r_{,} - r = \frac{(\mu_{,} + \mu)(\mu_{,} - \mu)}{r' + r}$$

Setzt man für r' den Werth $\frac{r'+r}{2} + \frac{r'-r}{2}$

r „ „ $\frac{r'+r}{2} - \frac{r'-r}{2}$

$\mu_{,}$ „ „ $\frac{\mu_{,}+\mu}{2} + \frac{\mu_{,}-\mu}{2}$

μ „ „ $\frac{\mu_{,}+\mu}{2} - \frac{\mu_{,}-\mu}{2}$

und führt diese Werthe in die Gleichung (α) ein, so erhält man:

$$d^2 = \left(\frac{r'+r}{2}\right)^2 + \left(\frac{r'-r}{2}\right)^2 + \frac{(r'+r)(r'-r)}{2} - \left(\frac{\mu_{,}+\mu}{2}\right)^2$$
$$- \left(\frac{\mu_{,}-\mu}{2}\right)^2 - \frac{(\mu_{,}+\mu)(\mu_{,}-\mu)}{2}$$

und mit Benutzung der Bedingungsgleichung (β)

$$d^2 = \left(\frac{r'+r}{2}\right)^2 + \left(\frac{r'-r}{2}\right)^2 - \left(\frac{\mu_,+\mu}{2}\right)^2 - \left(\frac{\mu_,-\mu}{2}\right)^2 \quad (1)$$

Setzt man

$$\frac{\mu_,+\mu}{r'+r} = \sin\beta$$

$$\frac{\mu_,-\mu}{r'+r} = \sin\beta'$$

so erhält man als Bedingungsgleichung

$$r'-r = (r'+r)\sin\beta\sin\beta'$$

und dadurch

$$d^2 = \left(\frac{r'+r}{2}\right)^2 \{1 + \sin\beta^2 \sin\beta'^2 - \sin\beta^2 - \sin\beta'^2\}$$

$$d^2 = \left(\frac{r'+r}{2}\right)^2 \{(1-\sin\beta^2)\ (1-\sin\beta'^2)\}$$

$$d^2 = \left(\frac{r'+r}{2}\right)^2 \cos\beta^2 \cos\beta'^2$$

$$d = \frac{r'+r}{2}\cos\beta\cos\beta' \quad (2)$$

Ist t' das Zeitintervall zwischen den äussern Rändern,
t das Zeitintervall zwischen den innern Rändern
ausgedrückt in mittlerer Zeit,
m der Reductionsfactor der Uhrzeit auf Sternzeit, so ist:

$$\mu = \frac{15\,.\,m\,t\cos\delta}{2} \qquad \sin\beta = \frac{15\,m\cos\delta\,(t'+t)}{2\,(r'+r)}$$

$$\mu_, = \frac{15\,m\,t'\cos\delta}{2} \qquad \sin\beta' = \frac{15\,m\cos\delta\,(t'-t)}{2\,(r'+r)}$$

Setzt man

$$\frac{15\,m}{2\,(r'+r)} = C\sec\delta\,,$$

so ist die Grösse

$C\sec\delta$ für jedes Micrometer und jede Uhr eine Constante nnd man hat zu rechnen:

$$\sin\beta = C\,(t'+t)$$
$$\sin\beta' = C\,(t'-t)$$

wodurch man erhält:

$$d = \frac{r'+r}{2}\cos\beta\cos\beta'$$

Rechnet man ebenso für den andern Stern $d_,$, so erhält man:

$$\delta' - \delta = d_, - d \quad \text{und}$$

$$\alpha' - \alpha = T' - T \quad \text{wo } T' = \frac{e' + i'}{2}\,;\ T = \frac{e + i}{2} \text{ ist.}$$

Rechenschema für die Declination.

$$\begin{array}{r} t' \\ t \\ \hline \log C(t' + t) = \log \sin \beta \\ \log C(t' - t) = \log \sin \beta' \\ \hline \log \cos \beta \\ \log \left(\frac{r' + r}{2}\right) \cos \beta' \\ \hline d \end{array}$$

Beobachtet man die Durchgänge mit einer Pendeluhr oder einem Chronometer, so dürfte es vortheilhaft sein, immer bis auf 100 Sekunden zu zählen, wodurch man bei 300 Sekunden eine Controle hat, indem man dabei weniger in Gefahr kommt, sich beim Aufschreiben zu irren, als wenn man bis auf 60 zählt. Beobachtet man mit einem Zähler, der die Minute markirt, so zählt man besser auf 60, weil alsdann die Zählung durch den Zähler im Verlauf einer Minute jedesmal controlirt wird. Vor und nach der Beobachtung vergleicht man den Zähler mit der Pendeluhr und dem Chronometer, um seinen Gang mit in Rechnung bringen zu können.

Die Formeln für die, wegen der Refraction anzubringenden Verbesserungen, sind für das Kreismikrometer:

$$f = 1 - k' \sin 1'' \left\{ 1 + \left(\frac{\sqrt{a^2 - 1}}{\sin\{\psi + \frac{1}{2}(\delta' + \delta)\}} \right)^2 \right\} \quad \text{als Factor für die Chorde.}$$

$$\triangle \delta = k' \sin(\delta' - \delta) \operatorname{cosec}(\psi + \tfrac{1}{2}[\delta' + \delta])^2 \quad \text{Correction in } \delta,$$

$$\triangle \alpha = 2\,a\,b \cos(\psi + \tfrac{1}{2}[\delta' + \delta]) \sec \tfrac{1}{2}(\delta' + \delta) \triangle \delta \quad \text{Correction in } \alpha$$

wobei k' = mittlere Refractions-Constante ist.

$tg\,\psi = \operatorname{cotg} \varphi \cos t$ $\quad \varphi$ = Polhöhe des Beobachtungsorts

t = Stundenwinkel des Sterns.

$$a = \frac{\cos\psi}{\sin\varphi}$$
$$b = \cos\varphi \sin t$$

Um k' zu finden, muss man die Zenithdistanz z des Sterns zur Zeit der Beobachtung kennen, man findet sie nach der Formel:

$$\cos z = \frac{\sin(\psi + \delta)}{a}$$

Macht man viele Beobachtungen, so thut man gut, sich eine Tafel zu berechnen, die mit dem Argumente t, den Werth von ψ, log a, log b gibt, in dieser Tafel ist alsdann:

ψ positiv im 1 und 4ten Quadrant,
negativ in 2 und 3ten Quadrant,
a immer positiv,
b positiv in 1 und 2
negativ im 2 und 3 Quadrant.

Für die Correction der Uhr, die mittlere Zeit gibt, auf Sternzeit hat man, da ein Sonnentag = 1,0027397 Sterntag ist in der Berechnung von

$$C = \frac{15m}{2(r' + r)} \cos\delta$$
$$\log m = 0{,}00119$$

zu setzen.

Für je 2 Sekunden, welche die Uhr im täglichen Gang nach oder vor geht, hat man noch eine Einheit der 5ten Stelle im Logarithmus als Correction hinzuzufügen, oder abzuziehen, denn es ist

$$\log \frac{86400}{86398} = 0{,}00001$$

Geht die Uhr genau Sternzeit, alsdann ist

$$m = 1 \quad \text{also} \quad \log m = 0\,.$$

Zweckmässig ist es, das Papier, auf welches man die beobachteten Durchgangszeiten aufschreibt, in einen Rahmen von Pappe zu legen, dessen Deckel ausgeschnittene Quadrate hat, so dass eine vollständige Beobachtung in den Raum eines Quadrats eingeschrieben wird. Dadurch wird man es vermeiden, die Beobachtungszahlen im Dunkeln ineinander zu schreiben.

c. Untersuchung über die Genauigkeit der Beobachtungen.

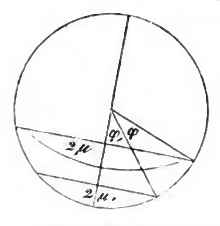
Ist r der Radius des Kreismikrometers,
φ und $\varphi_,$ die Positionswinkel,
$2\,\mu$ und $2\,\mu_,$ die Sehnen,
δ und δ' die Declination der Sterne, so ist

$$d_, - d = \delta' - \delta = r \cos \varphi_, \mp r \cos \varphi$$

— wenn die Sterne auf derselben
+ wenn sie auf entgegensetzten Seiten des Mittelpunktes durchgehen.

Um den Einfluss der Fehler von r und μ zu erhalten differentirt man obige Gleichung.

$$d(\delta' - \delta) = - r \sin \varphi_, \, d\varphi_, \pm r \sin \varphi \, d\varphi + (\cos \varphi_, \mp \cos \varphi) dr \quad (\alpha)$$



$$\mu = r \sin \varphi$$
$$\mu_, = r \sin \varphi_,$$
$$d\mu = r \cos \varphi \, d\varphi + \sin \varphi \, dr$$
$$d\mu_, = r \cos \varphi_, \, d\varphi_, + \sin \varphi_, \, dr$$

Diese Werthe in (α) eingeführt gibt

$$d(\delta' - \delta) \quad - r \sin \varphi_, \left(\frac{d\mu_, - \sin \varphi_,}{r \cos \varphi_,}\right) dr \pm r \sin \varphi \left(\frac{d\mu - \sin \varphi}{r \, . \cos \varphi}\right) dr$$
$$+ (\cos \varphi_, \mp \cos \varphi) dr$$

$$\cos \varphi \cos \varphi_, \, d(\delta' - \delta) = - \sin \varphi_, \cos \varphi \, d\mu_, \pm \sin \varphi \cos \varphi_, \, d\mu +$$
$$(\sin \varphi_,^2 \cos \varphi \mp \sin \varphi^2 \cos \varphi_, + \cos \varphi \cos \varphi_,^2 \mp \cos \varphi^2 \cos \varphi_,) \, dr$$

$$\cos \varphi \cos \varphi_, \, d(\delta' - \delta) = - \sin \varphi_, \cos \varphi \, d\mu_, \pm \sin \varphi \cos \varphi_, \, d\mu +$$
$$(\cos \varphi \mp \cos \varphi_,) \, dr$$

Richtet man die Beobachtung so ein, dass $d\mu = d\mu_,$ wird, dass also die Ein- und Austritte der beiden Sterne an symetrisch liegenden Punkten des Mikrometers stattfinden, so hat man:

$$\cos \varphi \cos \varphi_, \, d(\delta' - \delta) = - \sin(\varphi_, \mp \varphi) d\mu + (\cos \varphi \mp \cos \varphi_,) \, dr \quad (1)$$

Die Formel (1) gibt zu erkennen:

1) Die Beobachtung ist am genauesten, wenn die Sterne auf demselben Parallel laufen, dann ist $\varphi = \varphi_{,}$
2) Die Beobachtung wird um so ungenauer, je mehr φ und $\varphi_{,}$ verschieden sind.
3) Das Maximum der Ungenauigkeit findet statt, wenn φ und $\varphi_{,}$ nahe dem Werthe Null liegt, weil alsdann der Coefficient von $d\,(\delta' - \delta)$ sehr gross wird.

Der Einfluss eines Fehlers in der Chorde auf die Declinationsdifferenz ist, wenn die Sterne auf gleicher Seite durchgehen:

$$\frac{-\sin(\varphi_{,} - \varphi)}{\cos\varphi \cos\varphi_{,}}\, d\mu$$

Ist φ und $\varphi_{,}$ nahe gleich 90^0 so ist $\cos\varphi \cos\varphi_{,}$ sehr klein, also der Fehler $d\,\mu$ sehr gross. Für die Declinationsdifferenz ist es daher vortheilhaft die Sterne nahe am Rande durchgehen zu lassen.

Der Einfluss eines Fehlers im Radius auf den Declinationsunterschied ist, wenn die Sterne auf einer Seite durchgehen:

$$d\,(\delta' - \delta) = (\sec\varphi - \sec\varphi_{,})\, dr$$

liegt φ und $\varphi_{,}$ sehr nahe an 90^0, so wird $d\,(\delta' - \delta)$ sehr gross.

Gehen die Sterne auf verschiedenen Seiten des Mittelpunktes durch, so wird in beiden Fällen der Fehler vergrössert, denn es ist

$$\text{Einfluss eines Fehlers in der Chorde} = -\frac{\sin(\varphi_{,} + \varphi)}{\cos\varphi \cos\varphi_{,}}\, d\mu$$

$$\text{Einfluss eines Fehlers in dem Radius} = (\sec\varphi_{,} + \sec\varphi)\, dr$$

Die Rectascensionen werden immer am genauesten, wenn die Sterne durch die Mitte gehen, wobei aber ein Beobachtungsfehler in der Chorde sehr vergrössert in die Declination eingeht. Bei kleinen Sehnen wird die Declination von den Beobachtungsfehlern weniger afficirt.

d. Fehler des Gesichts und Gehörs.

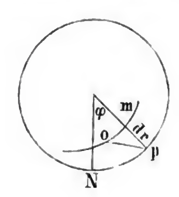
Der Fehler des Gehörs besteht darin, dass man den Ein- und Austritt eines Sterns zu früh oder zu spät be-

obachtet, man also einen andern Punkt als den richtigen für den Ein- und Austritt nimmt.

Dieser Fehler, der also in der beobachteten Sehne entsteht, heisse g.

Der Fehler des Gesichts entsteht dadurch, dass wir die Sterne im Fernrohr nicht als scharf begrenzte Punkte, sondern als Scheiben sehen. Bei der Beobachtung nehme man als Eintrittsmoment den an, wo der Stern merklich schwächer wird.

Der Fehler des Gesichts wirkt in der Richtung des Radius, er heisse f.



Schätzt man den Eintritt des Sterns statt im Punkte p im Punkte m, so ist $mp = dr = f$ der Fehler des Gesichts. Das Stück op der Sehne wird im Aequator in der Zeit $f \, . \operatorname{cosec} \Phi$, und für jeden Stern der die Declination δ hat in der Zeit

$$f \operatorname{cosec} \varphi \sec \delta$$

zurückgelegt, und dies ist der Fehler, um den man die Chorde falsch beobachtet.

Der Totalfehler in der beobachteten Zeit des Ein- und Austritts setzt sich also zusammen aus einem Fehler g und aus dem Fehler

$$f \operatorname{cosec} \varphi \sec \delta \, .$$

Um den wahrscheinlichen Fehler in der Rectascensions- und Declinations-Differenz zu bestimmen benutze man folgende Sätze aus der Methode der kleinsten Quadrate.

1) Ist für die Beobachtung a der wahrscheinliche Fehler $= \alpha$
für die Beobachtung b der wahrscheinliche Fehler $= \beta$
so ist der wahrscheinliche Fehler für die Grösse $a \pm b$

$$\sqrt{\alpha^2 \quad \beta^2}$$

Ist $\alpha = \beta$, so ist der wahrscheinliche Fehler $= \alpha \sqrt{2}$

2) Wenn der wahrscheinliche Fehler von $a = \alpha$
so ist der wahrscheinliche Fehler von $\frac{a}{n} = \frac{\alpha}{n}$ wo n eine absolute Zahl bedeutet.

3) Wenn der wahrscheinliche Fehler von $a = \alpha$,
so ist der wahrscheinliche Fehler eine beliebige Function von $a = \alpha f' (a)$

1. Fehlerbestimmung in Rectascension.

$$\text{Es ist } \alpha' - \alpha = T' - T$$

$$\text{wo } T' = \frac{e' + i'}{2}$$

jede der e und i hat einen wahrscheinlichen Fehler.

$$\sqrt{g^2 + f^2 \operatorname{cosec} \varphi^2 \sec \delta^2} = s \text{ (Sinnenfehler)}$$

Nach (1) ist also der wahrscheinliche Fehler von $e' + i' = s\sqrt{2}$

der wahrscheinliche Fehler von $T_, = \frac{s\sqrt{2}}{2}$

„ „ „ „ $T = \frac{s\sqrt{2}}{2}$

demnach wahrscheinl. Fehler in $\alpha' - \alpha = \sqrt{\frac{2s^2}{4} + \frac{2s^2}{4}} = s$

In der Rectascension ist also der wahrscheinliche Fehler:

$$\sqrt{g^2 + f^2 \operatorname{cosec} \varphi^2 \sec \delta^2}$$

2. Fehlerbestimmung in Declination.

$$\text{Es ist } \delta' - \delta = d_, - d$$

$$\text{wo } d = r \cos \varphi$$

$$\mu = r \sin \varphi$$

μ ist hier die Veränderliche; es ist aber

$$\mu = \frac{e - i}{2} \cos \delta$$

der wahrscheinliche Fehler von μ ist also $\frac{s\sqrt{2}}{2} \cos \delta$

Nach (3) verhält sich:

Wahrsch. Fehler μ : Wahrsch. Fehl. $d = \frac{d \,.\, r \sin \varphi}{d\varphi} \,.\, \frac{d \,.\, r \cos \varphi}{d\varphi}$

„ μ : „ $d = 1 : tg\, \varphi$

Wahrsch. Fehler von $d = \frac{s\sqrt{2}}{2}\, tg\, \varphi \cos \delta$

Also wahrsch. Fehler von

$$\delta' - \delta = s \, tg \, \varphi \cos \delta \,.\; \sqrt{g^2 tg \, \varphi^2 \cos \delta^2 + \frac{f^2}{\text{cosin} \, \varphi^2}}$$

Ist die Declination des Sterns δ, so ist, wenn diese auf den grössten Kreis reducirt wird

$$\text{Wahrsch. Fehl. in } \alpha' - \alpha = s \cos \delta = \sqrt{g^2 \cos \delta^2 + f^2 \text{cosec} \, \varphi^2}$$
$$= \sqrt{g^2 \cos \delta^2 + \frac{f^2}{\sin \varphi^2}}$$

$$\text{Wahrsch. Fehl. in } \alpha' - \alpha = \frac{1}{\sin \varphi} \sqrt{g^2 \cos \delta^2 \sin \varphi^2 + f^2}$$
$$\text{,, \quad ,, \quad in } \delta' - \delta = \frac{1}{\cos \varphi} \sqrt{g^2 \cos \delta^2 \sin \varphi^2 + f^2}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt:

1) Dass man die Rectascensions- und Declinations-Differenz gleich gut erhält, wenn die Sterne unter einem Positionswinkel $\varphi = 45^0$ hindurchgehen.
2) Im Bogen des grössten Kreises werden die Beobachtungen um so genauer, je grösser die Declinationen sind, weil alsdann $\cos \delta^2$ eine kleine Grösse wird.
3) Das Maximum von Genauigkeit erhält man für $\delta' - \delta$, wenn $\varphi = 0$ ist, alsdann ist aber $\alpha' - \alpha$ ganz unbestimmt, weil $\frac{1}{\sin \varphi} = \infty$ ist.
4) Kennt man das Verhältniss von f und g, so kann man für jedes δ dasjenige φ ableiten, das die grösste Genauigkeit gibt.

Der wahrscheinlichste Fehler der Position ist

$$= \sqrt{(\text{Fehler in } AR)^2 + (\text{Fehler in } \delta)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{(f^2 + g^2 \sin \varphi^2 \cos \delta^2)}{\sin \varphi^2 \cos \varphi^2}}$$
$$= \frac{1}{\cos \varphi} \sqrt{\frac{f^2}{\sin \varphi^2} + g^2 \cos \delta^2}$$

e. Berechnung des Durchmessers.

Es ist $\delta' - \delta$ gegeben und man soll aus den beobachteten μ und $\mu_\prime$ den Halbmesser r berechnen.

$$\delta' - \delta = d_, - d$$
$$d = r \cos \varphi$$
$$d_, = r \cos \varphi_,$$
$$d_, - d = r(\cos \varphi_, - \cos \varphi) = \delta' - \delta \quad \text{also}$$

$$(1)\begin{cases} r = \dfrac{\delta' - \delta}{\cos \varphi_, - \cos \varphi} = \dfrac{-(\delta' - \delta)}{2 \sin {}^1\!/_2 (\varphi_, + \varphi) \sin {}^1\!/_2 (\varphi_, - \varphi)} \\ \quad \text{wenn die Sterne auf gleicher Seite durchgehen.} \\ r = \dfrac{\delta' - \delta}{\cos \varphi_, + \cos \varphi} = \dfrac{\delta' - \delta}{2 \cos {}^1\!/_2 (\varphi_, - \varphi) \cos {}^1\!/_2 (\varphi_, + \varphi)} \end{cases}$$

wenn die Sterne auf entgegengesetzter Seite durchgehen,

und da $\mu = r \sin \varphi$ mit den Bedingungsgleichungen

$\mu_, = r \sin \varphi_,$

$$\left.\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{\mu}{r} \\ \sin \varphi_, &= \frac{\mu_,}{r} \end{aligned}\right\} (2)$$

$$\mu_, + \mu = r(\sin \varphi_, + \sin \varphi) = 2r \sin {}^1\!/_2 (\varphi_, + \varphi) \cos {}^1\!/_2 (\varphi_, - \varphi)$$
$$\mu_, - \mu = r(\sin \varphi_, - \sin \varphi) = 2r \sin {}^1\!/_2 (\varphi_, - \varphi) \cos {}^1\!/_2 (\varphi_, + \varphi)$$
$$\frac{\mu_, + \mu}{\delta' - \delta} = \frac{2r \sin {}^1\!/_2 (\varphi_, + \varphi) \cos {}^1\!/_2 (\varphi_, - \varphi)}{2r \cos {}^1\!/_2 (\varphi_, + \varphi) \cos {}^1\!/_2 (\varphi_, - \varphi)} = tg\, {}^1\!/_2 (\varphi_, + \varphi)$$
$$\frac{\mu_, - \mu}{\delta' - \delta} = \frac{2r \sin {}^1\!/_2 (\varphi_, - \varphi) \cos {}^1\!/_2 (\varphi_, + \varphi)}{2r \cos {}^1\!/_2 (\varphi_, - \varphi) \cos {}^1\!/_2 (\varphi_, + \varphi)} = tg\, {}^1\!/_2 (\varphi_, - \varphi)$$

setzt man

$$\frac{\mu_, + \mu}{\delta' - \delta} = tg\, a,$$
$$\frac{\mu_, - \mu}{\delta' - \delta} = tg\, b$$

so ist:

$$a = {}^1\!/_2 (\varphi_, + \varphi)$$
$$b = {}^1\!/_2 (\varphi_, - \varphi)$$

Dies in (1) eingeführt gibt, wenn die Sterne auf entgegengesetzter Seite durchgehen:

$$r = \frac{\delta' - \delta}{2 \cos a \cos b}$$

$$(3)\quad 2r = \frac{\delta' - \delta}{\cos a \cos b} = (\delta' - \delta) \sec a \sec b$$

Aus der Differentialgleichung

$$\cos \varphi \cos \varphi_, \, d(\delta' + \delta) = -\sin(\varphi_, + \varphi)\, d\mu + (\cos \varphi + \cos \varphi_,)\, dr,$$

oder

$$dr = \frac{\cos \varphi \cos \varphi_, \, d(\delta' - \delta)}{\cos \varphi \cos \varphi_,} + \frac{\sin(\varphi_, + \varphi)\, d\mu}{\cos \varphi + \cos \varphi_,} \quad \text{folgt:}$$

1) Hat man genau bestimmte Declinationen, so wähle $\delta' - \delta$ so, dass es nahe zu $= 2r$ wird.

2) Hat man keine genauen Declinationsbestimmungen, so nehme an φ_1 nahe an 90^0 und φ_2 nahe an 0^0 an; alsdann ist der Coefficient von $\delta' - \delta$ nahe $= 0$, der von $d\mu$ nahe $= 1$. Dabei gehen also die Beobachtungsfehler vollständig in das Resultat ein.

3) Nimmt man Sterne, die durch den Mittelpunkt gehen, so wählt man mit Vortheil nördliche Sterne, wie dies die Untersuchung über die Fehler gibt, indem alsdann $\cos\delta^2$ sehr klein wird. Alsdann ist aber eine Reduction der Chorde auf den grössten Kreis nöthig.

Die Bestimmung des Durchmessers ist das wichtigste Moment bei der Benutzung des Kreismicrometers, da alle Messungen mit demselben auf der richtigen Bestimmung des Durchmessers beruhen. Das genaueste Verfahren bleibt immer die Bestimmung desselben durch Sterndurchgänge, wenn man über Sterne verfügen kann, deren Declination scharf bestimmt ist, und wenn man für jeden Rand einige Hundert Durchgänge nimmt. Als zu benutzende Sterne eignen sich dazu besonders die von Bessel bestimmte Plejadengruppe, die im Anhange berechnet für den mittlern Ort 1840 folgen und nach Declination geordnet sind. Sehr zweckmässig ist es vor der Bestimmungen des Durchmessers sich eine Karte der Plejadengruppe anzufertigen, wodurch man in den Stand gesetzt ist, schon vor den Beobachtungen passende Sterne herauszusuchen, wenn man aus der Zeit eines Sterndurchgang den Durchmesser annähernd berechnet hat.

Nach dieser theoretischen Betrachtung soll nun die Benutzung des Kreismicrometers an praktischen Beispielen näher erläutert werden.

Berechnung des Durchmessers des äusseren Randes des Ringes.

Beobachtung vom 27. März 1861.

Benutzte Sterne aus Bessels Plejadengruppe

c Maja mittl. Ort 1840

$\delta = 23^\circ 51' 43'',12 \qquad \alpha = 54^\circ 4' 46''$

23 Merope mittl. Ort 1840

$\delta' = 23^\circ 26' 39'',23 \qquad \alpha = 54^\circ 12' 37''$

a. Reduction auf den scheinbaren Ort für 27. März 1861 9^h.

für 1861,0 mittl. Ort $\delta = 23^\circ 55' 47'',959 \qquad \alpha = 54^\circ 23' 26''$

$\delta' = 23^\circ 30' 43'',334 \qquad \alpha' = 54^\circ 31' 17''$

$$i \cos \delta = -7'',384 \qquad i \cos \delta' = -7'',409$$

$$g \cos (G + \alpha) \quad +9'',383 \qquad g \cos (G + \alpha') = +9'',367$$

$$h \cos (H + \alpha) \sin \delta = +5'',234 \qquad h \cos (H + \alpha) \sin \delta' = +5'',135$$

$$\text{Correc. } \delta = +7'',232 \qquad \text{Correc. } \delta' = +7'',093$$

scheinb. Ort ohne Refractions-Correction für 1861 März 27. 9^h $\left\{ \begin{array}{l} \delta = 23^\circ 55' 55'',191 \\ \delta' = 23^\circ 30' 50'',427 \end{array} \right.$

$$\delta' - \delta = 25' 4'',764$$

b. Reduction für Refraction.

Beobachtung M. Z. $9^h 18'$

$+1', 32''$

S. Z. $9^h 19' 32''$

S. Z. im mittl. Mittag $0^h 19' 30''$

$$\vartheta = 9^h 39' 2''$$

$$\alpha = 3^h 37' 42''$$

$$t = \vartheta - \alpha = 6^h 1', 3$$

$$\psi = -0^\circ 16' 40'' \qquad \log a = 0,11904$$

$$\delta = 23^\circ 43' 16''$$

$$\psi + \delta = 23^\circ 26' 36''$$

$$\log \sin (\psi + \delta) = 9,59971$$

$$\log a = 0,11904$$

$$\log \cos z = 9,48067$$

$$z = 72^\circ 24',3$$

$$\log k' = 1{,}75522$$
$$\log \sin(\delta' - \delta) = 7{,}86311$$
$$\log \operatorname{cosec} (\delta + \psi)^2 = 0{,}80056$$
$$0{,}41889$$
$$-\triangle\delta = -2'',6235$$

$$\log a^2 = 0{,}23808$$
$$9{,}86340 : 2$$
$$\log \sqrt{a^2 - 1} = 9{,}93170$$
$$\log \frac{1}{\sin(\psi + \delta)} = \frac{0{,}40028}{0{,}33192}$$
$$2$$
$$0{,}66396$$
$$0{,}74918$$
$$\log k' = 1{,}75522$$
$$\log \sin 1'' = 4{,}68557$$
$$7{,}18997$$
$$2{,}80934$$
$$9{,}99931$$
$$\log f = -0{,}00069$$

$$\delta' - \delta = 25'\,4'',764$$
$$-\triangle\delta = -2'',624$$
$$\delta' - \delta = 25'\,2'',140 = 1502'',41$$
$$\log(\delta' - \delta) = 3{,}17671$$

reducirt auf den scheinbaren Ort mit Rücksicht auf Nutation, Präcession und Refraction.

c. Correction der Uhr.

Der Zähler verglichen mit der Uhr die nahe Sternzeit geht

0 des Zählers vor der Beobachtung $9^h\,33'\,48''$ S. Z.
0 des Zählers nach der Beobachtung $10^h\,15'\,48'',4$.

Also für 42′ geht der Zähler 0″,4 nach.
Gang des Zählers für 24 Stunden 13″ nach.

Da aber die Sternuhr selbst 5″ in 24 Stunden vorgeht, so ist eine Correction von + 8″ in Rechnung zu bringen; es ist also:

$$\log m = 0{,}00004$$

d. Beobachtete Durchgangszeiten.

Ist s die beschriebene Sehne, ausgedrückt durch die Differenz der Uhrzeiten, so ist:

$$\mu = s\, m f \cos\delta \, \frac{15}{2} \quad \text{wo } s = e - i$$

$$\mu_{,} = s_{,}\, m f \cos\delta' \, \frac{15}{2} \quad \text{wo } s_{,} = e' - i'$$

$$tg\, a = \frac{\mu_{,} + \mu}{\delta' - \delta}\, ;\; tg\, b = \frac{\mu_{,} - \mu}{\delta' - \delta}$$

so ist:

$$tg\, a = (s_{,} \cos\delta' + s \cos\delta)\, \frac{15\, m . f}{2\, (\delta' - \delta)}$$

$$tg\, b = (s_{,} \cos\delta' - s \cos\delta)\, \frac{15\, m . f}{2\, (\delta' - \delta)}$$

Setzt man

$$\frac{1}{D} = \frac{15 . m f}{2\, (\delta' - \delta)}$$

so ist:

$$\begin{cases} tg\, a = \dfrac{(s_{,} \cos\delta' + s \cos\delta)}{D} \\ tg\, b = \dfrac{(s_{,} \cos\delta' - s \cos\delta)}{D} \end{cases} \quad 2r = (\delta' - \delta) \sec a . \sec . b$$

Rechenschema.

$s_{,} \cos\delta'$
$s \cos\delta$

$\log\, (s_{,} \cos\delta' + s \cos\delta)$ } davon $\log D$ im Kopfe
$\log\, (s_{,} \cos\delta' - s \cos\delta)$ } abgezogen gibt

$\log \sec a$
$\log \sec b\, (\delta' - \delta)$

$2r$

$$\frac{1}{D} = \frac{15\, m f}{2\, (\delta' - \delta)}$$

$$\log 15 = 1{,}17609$$
$$\log m = 0{,}00004$$
$$\log f = 9{,}99931$$
$$\log \tfrac{1}{2} \;...\; 9{,}69897$$
$$\log \frac{1}{(\delta' - \delta)} = 6{,}82329$$

$$\log \frac{1}{D} = 7{,}69770$$
$$\log D = 2{,}30230$$

Durchgänge.

c Maja ging nördlich
23 Merope ging südlich durch.

N	S								
44,5	72,6	7,4	48,1	51,0	80,4	12,3	44,2	23,9	61,9
110,0	142,3	83,8	104,5	116,8	150,2	79,9	109,8	98,7	119,8
N	S								
32,1	63,3	33,4	71,9	19,1	69,8	43,2	79,1	31,2	52,3
99,8	131,1	107,6	131,0	102,1	115,9	115,1	143,0	87,9	130,0

$s \cos \delta$	59,87	69,83	60,14	61,79	68,37
$s, \cos \delta'$	63,91	51,72	64,00	60,15	53,09
	2,09265	2,08476	2,09301	2,08615	2,08443
	0,60638	1,25792	0,58659	0,21484	1,18412
	0,07007	0,06792	0,07017	0,06830	0,06783
	3,17680	3,17848	3,17679	3,17672	3,17805
$2r =$	1765,5	1763,6	1765,8	1758,0	1761,5
$s \cos \delta$	61,73	67,82	75,86	65,72	51,82
$s, \cos \delta'$	62,17	54,19	42,17	58,59	71.25
	2,09307	2,08640	2,07199	2,09451	2,09015
	9,64345	1,13450	1,52750	0,85309	1,28847
	0,07019	0,06837	0,06457	0,07058	0,06938
	3,17671	3,17771	3,18275	3,17598	3,17874
$2r =$	1765,6	1762,3	1767,3	1768,3	1770,6

Mittel für $2r = 1764{,}''86$ im Bogen.

Beobachtung vom 15. Januar 1861.

Nebelfleck' h (242)
Vergleichsstern Bessels Zone 527

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = 2^h\, 29'\, 52{,}''08 \\ \delta \quad 38^0\, 28'{,}7 \end{array}\right\} \text{ auf den scheinbaren Ort reducirt.}$$

Es wurden 2 Nord- und 2 Süddurchgänge genommen, die Durchgangszeiten mit einem Chronometer bestimmt, der nach mittlerer Zeit ging.

$$T = \frac{e + i}{2}$$

$$T' = \frac{e' + i'}{2}$$

$$\alpha' - \alpha = T' - T$$

Anfang der Beobachtung:

$9^u\,52' = 0$

	Nebel	Stern	Nebel	Stern
N.	24,8	63,8	122,7	151,8
	34,9	73,4	132,7	160,8
S.	222,5	252,8	326,7	364,3
	232,0	260,7	335,9	372,3

$0 = 9^u\,57'$

S.	139,9	169,2	233,0	271,9
	149,6	177,4	243,3	279,5

$0 = 10^u\,2'$

N.	43,4	82,9	139,2	167,7
	53,0	92,8	149,5	177,5

$90 = 10^u\,5'\,10''$

	Stern	Nebel	
N.	112,3	78,75	
	112,6	78,80	
	112,45	78,775	— 33,675
S.	312,5	279,2	
	312,5	279,35	
	312,5	279,275	— 33,225
	224,35	191,6	
	224,65	191,3	
	224,45	191,45	— 33,05
N.	130,25	96,45	
	130,25	96,1	
	130,25	96,275	— 33,95

N.	— 33,8125
S.	— 33,1375
	— 33″.475 mittl. Zeit.
Reduction auf S.Z.	92
$\alpha' - \alpha =$	— 33″,567

Berechnung von

$$C = \frac{15\,m}{2\,(r' + r)} \cos \delta$$

Es ist

δ des Sterns $= + 38^{\circ}\,28',7$
δ' des Nebels $= + 38^{\circ}\,27',8$

$$\log \frac{r' + r}{2} = 2{,}92552$$

$$\log \frac{15}{4} = 0{,}57403$$

$$c.\ \log \frac{r' + r}{2} = 7.07448$$

$$\log m = 0{,}00119$$

$$\log C \sec \delta = 7{,}64970$$

$$\log f \quad -17 \quad \text{für Refraction}$$

$$\log C \sec \delta . f = 7{,}64953$$

$$\log C \sec \delta f = 7{,}64953$$

$$\log \cos \delta = 9{,}89367$$

$$\log C \text{ für den Stern} = 7{,}54220$$

$$7{,}64953$$

$$\log \cos \delta' \quad 9{,}89377$$

$$\log C \text{ für den Nebel } D = 7{,}54330$$

Rechenschema für die Declination.

t' Zeitintervall zwischen den äussern Rändern.
t Zeitintervall zwischen den innern Rändern des Rings.

$$t'$$

$$t$$

$$\log C(t' + t) = \log \sin \beta$$

$$\log C(t' + t) = \log \sin \beta'$$

$$\log \cos \beta$$

$$\log \left(\frac{r' + r}{2}\right) \cos \beta'$$

$$d$$

Nebel

N	107,9	S.	113,4		103,4	N	106,1
	87,8		94,7		83,4		86,2
	9,83489		9,86157		9,81468		9,82728
	8,84650		8,81514		8,84433		8,84215
	9,86315		9,83669		9,87947		9,86963
	$d = 613{,}3$		2,92459		2,92448		2,92447
			577,1		636,7		622,4

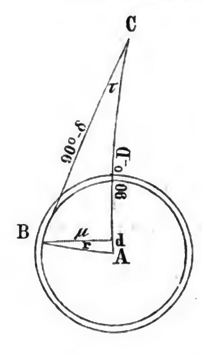
Stern							
N	97,0	S.	119,4		110,3	N	94,6
	78,4		103,6		94,5		74,9
	9,78723		9,89150		9,85453		9,77237
	8,81271		8,74186		8,74186		8,83767
	9,89781		9,79634		9,84432		9,90628
	2,92460		2,92486		2,92486		2,92449
	$d = 664,4$		526,2		587,7		677,3

$d_{,} - d =$ — 51,1 N
— 54,9
— 50,8 S
— 49,0

— 53,0 N
— 49,9 S

$d_{,} - d = - 51'',47$

f. Reduction der Chorden auf den grössten Kreis, wenn man zur Berechnung der $\delta' - \delta$ Sterne mit hoher Declination benutzt.



Das $\triangle$ ABC liege zwischen dem Pol C und dem Mittelpunkte A; der Ein- oder Austritt des Sterns erfolge bei B.

$\sphericalangle$ τ sei der Winkel am Pol und in Bogensekunden ausgedrückt.

δ die Declination des Sterns.

D die Declination des Mittelpunktes, so ist

$$\mu = \tau \cos \delta .$$

Man hat aber auch

$$\cos r = \sin \delta \sin D + \cos \delta \cos D \cos \tau$$

setzt man

$$1 - \cos \tau = 2 \sin \tfrac{1}{2} \tau^2$$

so ist

$$\cos r = \sin \delta \sin D + \cos \delta \cos D - 2 \cos \delta \cos D \sin \tfrac{1}{2} \tau^2$$
$$\sin \tfrac{1}{2} r^2 = \sin \tfrac{1}{2} (\delta - D)^2 + \cos \delta \cos D \sin \tfrac{1}{2} \tau^2$$
$$\sin \tfrac{1}{2} (\delta - D)^2 = \sin \tfrac{1}{2} r^2 - \cos \delta \cos D \sin \tfrac{1}{2} \tau^2 \quad (1)$$

Daraus lässt sich folgende Näherungsformel entwickeln, wenn man den sin dieser kleinen Winkel mit dem Bogen vertauscht, mit Ausnahme von $\sin \tfrac{1}{2} \tau^2$, weil τ immer grösser wird, je mehr man sich dem Pole nähert.

Dadurch hat man:

$$\tfrac{1}{4} (\delta - D)^2 = \tfrac{1}{4} r^2 - \cos \delta \cos D \sin \tfrac{1}{2} \tau^2$$
$$\tfrac{1}{4} (\delta - D)^2 = \tfrac{1}{4} r^2 - \cos \delta^2 \sin \tfrac{1}{2} \tau^2 \quad \cos \delta \sin \tfrac{1}{2} \tau^2 (\cos \delta - \cos D.)$$

Da $\cos \delta$, $\cos \delta - \cos D$ sehr klein ist, kann man für $\sin \tfrac{1}{2} \tau^2$ den Bogen setzen, wodurch man hat:

$$(\delta - D)^2 = r^2 - \cos \delta^2 \tau^2 + \tau^2 \cos \delta (\cos \delta - \cos D)$$

Es ist aber

$$\cos \delta - \cos D = -2 \sin \tfrac{1}{2} (\delta - D) \sin \tfrac{1}{2} (\delta + D)$$
$$= -(\delta - D) \sin \delta$$

wodurch man hat:

$$(\delta - D)^2 = r^2 - \tau^2 \cos \delta^2 - \tau^2 \sin \delta \cos \delta (\delta - D)$$

Es ist aber:

$$\mu = \tau \cos \delta$$
$$d^2 = r^2 - \mu^2$$
$$d = \delta - D$$

Demnach:

$$(\delta - D)^2 = d^2 - \tau^2 \sin \delta \cos \delta \, d$$
$$(\delta - D)^2 = d^2 \left(1 - \frac{\tau^2 \sin \delta \cos \delta}{d}\right)$$

(α) $\delta - D = d - \tfrac{1}{2} \tau^2 \sin \delta \cos \delta$ und für den andern Stern

(β) $\delta' - D = d_{,} - \tfrac{1}{2} \tau'^2 \sin \delta' \cos \delta'$

$$\delta' - \delta = d' - d - \tfrac{1}{2} (\tau'^2 \sin \delta' \cos \delta' - \tau^2 \sin \delta \cos \delta) \quad (2)$$

Das 2te Glied der rechten Seite der Gleichung (2) gibt also die Correction an.

Setzt man:

$$\sin \delta \cos \delta = tg\, \delta \cos \delta^2$$
$$\sin \delta' \cos \delta' = tg\, \delta' \cos \delta'^2$$

ferner

$$tg\ {}^1\!/_2\,(\delta' + \delta)\ \text{statt}\ tg\,\delta$$
$$tg\ {}^1\!/_2\,(\delta' + \delta)\ \text{statt}\ tg\,\delta'$$

so wird:

$$\delta' - \delta = d_, - d - {}^1\!/_2\, tg\,(\delta' + \delta)\,(r^{2\prime} \cos \delta'^2 - r^2 \cos \delta^2) \quad (\gamma)$$

und das

$$r'^2 \cos \delta'^2 = \mu'^2 = r^2 - d_,^2$$
$$r^2 \cos \delta^2 = \mu^2 = r^2 - d^2$$

so ist

$$\delta' - \delta = d_, - d + {}^1\!/_2\, tg\,(\delta' + \delta)\,(d_, + d)\,(d_, - d) \sin 1'' \quad (3)$$

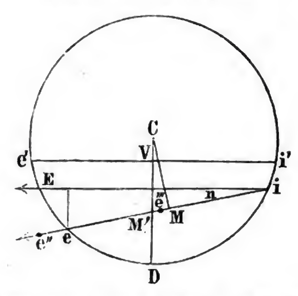
Die Gleichung (3) ist noch genau für $\delta = 65^0$ bis 70^0

Sind die δ noch grösser, so nehme man Formel (γ) in folgender Form:

$$\delta' - \delta = d_, - d - {}^1\!/_2\,(\mu'^2\, tg\,\delta' - \mu^2\, tg\,\delta) \quad (4)$$

Auf die Rectascensionsdifferenzen haben die δ keinen Einfluss, weil jede Chorde symmetrisch durch den Declinationskreis der Mitte geschnitten wird.

g. Berechnung der Rectascensions- und Declinationsdifferenz, wenn das eine Gestirn eine Eigenbewegung hat.



Ein Planet oder Comet habe in AR die Eigenbewegung $= x$, in δ die Eigenbewegung $= y$, während der Dauer eines mittleren Sonnentags; ferner sei CD der durch den Mittelpunkt des Gesichtsfeldes gehende Declinationskreis, so wird der Comet nicht mehr die auf diesem senk-

rechte Sehne $i\ E$, sondern er wird die Sehne ie beschreiben. Die Mitte zwischen dem Ein- und Austritt, wie sie die frühern Formeln geben, findet also nicht im Punkte M', sondern in M statt. Beschreibt der Vergleichsstern die Sehne $i'\ e'$ so erhält man durch die Formeln nicht die richtige Declinationsdifferenz $C\ M' - C\ V$, sondern $C\ M - C\ V$.

Ist n der Winkel, den die Sehnen $i\ E$ und $i\ e$ bilden, so ist

$$tg\,n = \frac{P\,M'}{Pi} = \frac{\text{gleichzeitige Bewegung des Cometen in } \delta}{\text{gleichzeitige Bewegung im Stundenwinkel reducirt auf den grössten Kreis.}}$$

Durch die tägliche Bewegung der Erde läuft der Comet in einem mittleren Sonnentag 86636,555347 Zeitsecunden im Stundenwinkel. Ist nun die tägliche Bewegung des Cometen in $A\ R = 4\,x$ Zeitsecunden, so ist die wirkliche Bewegung des Cometen im Stundenwinkel $(86636{,}55 - 4\ x)\cos\delta$ Zeitsecunden $= (21659{,}14 - x)\cos\delta$ Bogenminuten. Es ist also:

$$tg\,n = \frac{y}{(21659{,}14.. - x)\cos\delta} = \frac{y\sec\delta}{b - x}$$

Geht der Vergleichsstern bei V durch den Declinationskreis der Mitte, so ist die Declinationsdifferenz von Comet und Stern:

$$\delta' - \delta = C\ M' - C\ V$$

Durch die frühern Formeln erhält man aber nur $C\ M$ oder (d_0) woraus

$$C M' = (d_0)\sec n$$

$$\sec n = \sqrt{\left(1 + \frac{y^2\sec\delta^2}{(b-x)^2}\right)} \quad \text{also}$$

$$d_{,} = (d_0)\sqrt{\left(1 + \frac{y^2\sec\delta^2}{(b-x)^2}\right)} \quad (1)$$

Hätte der Comet keine Eigenbewegung in $A\ R$, so würde er sich durch die tägliche Bewegung der Erde allein, in derselben Zeit z. B. von i nach e'' bewegen, in der er sich durch beide Geschwindigkeiten von i nach e bewegt. Ebenso würde er ohne Eigenbewegung in e''' sein, wenn er sich mit derselben in M befindet. Man

findet also die Länge von $i\,M = (\mu_0)$ durch folgende Proportion:

$$i\,M : i\,e''' = b - x : b$$

$$\frac{i\,M}{i\,e'''} = \frac{b-x}{b}$$

es ist also:

$$(\mu_0) = 15\,\frac{e-i}{2}\cos\delta\,\frac{b-x}{b}$$

$$(d_0) = \sqrt{(r^2 - [\mu_0]^2)}$$

Setzt man die Constante

$$C' = \frac{15\cos\delta}{4\,r}\,\frac{(b-x)}{b}$$

so ist:

$$\log\frac{b-x}{b} = \log\left(1-\frac{x}{b}\right) = -M\left(\frac{x}{b} + 1/2\,\frac{x^2}{b^2} + 1/3\,\frac{x^3}{b^3} + \ldots\right)$$

$$\sec n = \sqrt{1 + \frac{y^2\sec\delta^2}{(b-x)^2}} = 1 + \frac{y^2\sec\delta^2}{2\,(b-x)^2} + \ldots$$

Werden nun die höheren Potenzen vernachlässigt, so ist:

$$\log\frac{b-x}{b} = -\frac{M\,x}{b} = -\frac{0{,}43429448\,x}{21659{,}14\ldots}$$

$$\log M = 9{,}63778$$

$$\log 21659{,}14 = 4{,}33565$$

das heisst: $5{,}30213$

$$\log\frac{b-x}{b} \text{ ist nahe gleich } 0{,}00002\,x$$

oder wenn man unter x die zweitägige Eigenbewegung in $A\,R$ versteht:

$$\log\frac{b-x}{b} \text{ sehr nahe gleich } -0{,}00001\,x$$

$$\sec n = 1$$

Man hat also zur Berechnung der Declinationsdifferenz:

t' = Zeitintervall zwischen den äussern Rändern, } ausgedrückt in
t = Zeitintervall zwischen den innern Rändern } Uhrzeit
m = Reductionsfactor der Uhrzeit auf Sternzeit
$\triangle\alpha$ = der 48stündigen Eigenbewegung in $A\,R$, ausgedrückt in Bogenminuten.

$$\mu = \frac{15\, m\, t \cos \delta}{2}$$

$$\mu_{,} = \frac{15\, m\, t' \cos \delta}{2}$$

$$\sin \beta = \frac{15\, m \cos \delta\, (t' + t)}{2\,(r' + r)}$$

$$\sin \beta' = \frac{15\, m \cos \delta\, (t' - t)}{2\,(r' + r)}$$

$$C' = \frac{15\, m \cos \delta'}{2\,(r' + r)} \cdot E \quad \text{wo} \log E = -0{,}00001 \triangle \alpha$$

$$\sin \beta = C'\,(t' + t)$$

$$\sin \beta' = C'\,(t' - t)$$

$$d_{,} = \frac{r' + r}{2} \cos \beta \cos \beta' \quad (2)$$

Um also die Eigenbewegung zu berücksichtigen, hat man zum log der frühern Constanten C so viele Einheiten der fünften Stelle hinzuzufügen, als die rückläufige Eigenbewegung in $A\,R$ für 48 Stunden beträgt.

Berechnung der Rectascensions-Differenz.

Da die Correction $\triangle\, T'$ die Zeit ist, welche der Comet braucht, um das Stück $M\,M'$ zu durchlaufen, so hat man:

$$\triangle\, T' = d_{,}\, tg\, n\, \frac{b - x}{b} \sec \delta = (d_0)\, y\, \frac{\sec \delta^2}{b}$$

Nennt man die 48stündige Bewegung des Cometen in Declination $\triangle\,\delta$, so ist:

$$\triangle\,\delta = 2\,y \text{ und}$$

$$\triangle\, T' = \frac{d_{,}}{\cos \delta^2}\, \frac{\triangle\,\delta}{2\,b} \text{ im Bogen oder}$$

$$\triangle\, T' = \frac{d_{,}}{\cos \delta'^2}\, \frac{\triangle\,\delta}{30\,b} \text{ in Zeit oder}$$

$$\triangle\, T' = \frac{d_{,}}{\cos \delta'^2}\, \frac{\triangle\,\delta}{S} \quad \text{wo } c \,.\log S = 4{,}18724$$

Die Rectascensionsdifferenz ist also:

$$\alpha' - \alpha = T' - T + \frac{d_{,}}{\cos \delta'^2} \cdot \frac{\triangle\,\delta}{S} \quad (2)$$

wo die gestrichenen Grössen sich auf den bewegten Stern beziehen.

$\triangle\delta$ ist $\frac{\text{positiv}}{\text{negativ}}$, wenn der bewegte Stern nach $\frac{\text{Norden}}{\text{Süden}}$ läuft.

d, ist $\frac{\text{positiv}}{\text{negativ}}$, wenn der bewegte Stern $\frac{\text{nördlich}}{\text{südlich}}$ vom Mittelpunkte durchgeht.

Beispiel.

1861 Mai 4. Beobachtung des Cometen I. 1861 (Thatcher).

$0 = 10^h\ 38'$

	Comet		Stern	
N.	3,7	91,6	109,9	202,8
	15,7	101,7	120,8	214,7
S.	246,2	331,5	356,2	444,3
	258,9	343,5	368,0	457,2
	$0 = 10^h\ 43'$			
S.	181,7	260,7	290,4	380,8
	193,8	274,4	302,0	393,0
	$0 = 10^h\ 48'$			
N.	133,9	234,3	254,9	340,9
	144,9	244,2	267,0	353,0
	$0 = 10^h\ 53'\ 53''$			

Vergleichsstern aus Argelanders Zone 173 No. 120 $\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 9^h\ 53'\ 51'',62 \\ \delta = +45^0\ 15'\ 0'',4 \end{array} \right.$

für Epoche 1861,0

Correction auf den scheinbaren Ort $\left\{ \begin{array}{l} \triangle\alpha = +2'',96 \\ \triangle\delta = +0'',02 \end{array} \right.$

Comet genähert $\delta' = +45^0\ 14',4$

48stündige Eigenbewegung in $\triangle\alpha' = -360'$

$\triangle\delta' = -450'$

Uhrstand $-18'\ 48'',2$ M.Z.

a. Berechnung der Refraction.

Mitte der Beobachtung $10^h\ 46'$

$-18'\ 48'',2$

M.Z. $= 10^h\ 27'\ 11'',8$

Correction für S.Z. $+43''$

$10^h\ 27'\ 54'',8$

S.Z. im mittl. Mittag $2^h\,49'19'',0$

$$\vartheta = 13^h\,17'\,14''$$
$$\alpha = 9^h\,53'\,54''$$
$$t = 3^h\,23'\,10''$$
$$\psi = 28^0\,23'\,3''$$
$$\delta = 45^0\,15'$$
$$\psi + \delta = 73^0\,38'\,3''$$
$$\log \sin(\psi + \delta) = 9{,}98204$$
$$\log \cos z = 9{,}91863$$
$$z = 33^0\,59'$$
$$\log k' = 1{,}76114$$
$$\log a = 0{,}06341$$
$$\log a^2 = 0{,}12682$$
$$9{,}53036$$
$$\log \sqrt{a^2 - 1}\;\; 9{,}76518$$
$$c \log \sin(\psi + \delta) = 0{,}01796$$
$$9{,}78314$$
$$9{,}56628$$
$$0{,}56992$$
$$\left.\begin{array}{r} 0{,}13620 \\ \log k' = 1{,}76114 \\ \log \sin 1'' = 4{,}68557 \end{array}\right\}$$
$$6{,}58291$$
$$3{,}41691$$
$$9{,}99982$$
$$\log f = -\,0{,}00018$$

b. Berechnung von

$$C' = \frac{15\,m}{2\,(r' + r)} \cos \delta' \,E$$
$$\log \frac{15}{4} = 0{,}57403$$
$$c \log \frac{r' + r}{2} = 7{,}18908$$
$$\log m \;\; 0{,}00119$$
$$\log C' \sec \delta' = 7{,}76439$$
$$\log f = -\;\;18$$
$$\log C' \sec \delta' . f = 7{,}76412$$

$\log \cos \delta' = 9{,}84766$

$\log \triangle \alpha' = \quad + 360$

$\log C'$ des Cometen $= 7{,}61538$

$$C = \frac{15\, m}{2\,(r' + r)} \cos \delta$$

$7{,}76412$

$\log \cos \delta = 9{,}84758$

$\log C$ des Sterns $7{,}61170$

c. Berechnung der Declinationsdifferenz.

Comet

N. 98,0	S. 97,3	92,7	N. 110,3
75,9	72,6	66,9	89,4
9,85569	9,84558	9,81842	9,91577
8,94978	9,00809	9,02701	8,93554
9,84310	9,85332	9,87666	9,75360
2,80919	2,80865	2,80844	2,80930
$d_{,} = + 449'',04$	$- 459'',17$	$- 484'',29$	$+ 365'',51$

Stern

N. 104,8	S. 101,0	102,6	N. 98,1
82,0	76,3	78,7	73,9
9,88309	9,86042	9,87035	9,84724
8,96964	9,00441	8,98829	8,99553
9,80971	9,83793	9,82640	9,85171
2,80902	2,80869	2,80885	2,80878
$d_{,} = + 415'',65$	$- 443'',22$	$- 431'',77$	$+ 457'',60$

$d_{,} - d = + 33'',39$

$- 15{,}85$

$- 52{,}52$

$- 92{,}09$

$- 29'',55$ N.

$- 34{,}19$ S.

$d_{,} - d = - 31'',77$

d. Einfluss der Refraction auf α und δ

$$\log a = 0{,}06341$$
$$\log k' = 1{,}76114$$
$$\log \sin(\delta' - \delta) = 6{,}19073$$
$$\log \operatorname{cosec}(\psi + \delta)^2 = 0{,}03592$$
$$8{,}05120$$
$$\triangle \delta = -0'',011$$

$$\log 2 = 0{,}30103$$
$$\log a = 0{,}06341$$
$$\log b = 9{,}70188$$
$$\log \cos(\psi + \delta) = 9{,}44990$$
$$\log \sec \frac{\delta' + \delta'}{2} = 0{,}15235$$
$$\log \triangle \delta = 8{,}05120$$
$$7{,}71977$$

$\triangle \alpha = -0'',005$ im Bogen
$\triangle \alpha = -0'',00$ in Zeit.

e. Berechnung der Rectascensionsdifferenz.

Comet	Stern		
52,70	162,3		
53,65	161,8		
53,175	162,05	$\alpha' - \alpha = -108'',875$	M.Z.
		0,298	
		$-109'',173$	S.Z.
294,85	406,70		
295,20	406,15		
295,025	406,425	$\alpha' - \alpha = -111'',400$	M.Z.
		0,305	
		$-111'',705$	S.Z.
228,05	341,70		
227,25	341,40		
227,65	341,55	$\alpha' - \alpha = -113'',900$	M.Z.
		0,311	
		$-114'',211$	S.Z.

189,05	303,95	
189,60	303,95	
189,325	303,95	$\alpha' - \alpha = -114{,}625$ M.Z.
		0,313
		$-114{,}938$ S.Z.

f. Berechnung des Einflusses der Eigenbewegung auf die Rectascensionsdifferenz.

$$\log \triangle \delta' = 2{,}62325_n$$
$$c. \log S = 4{,}18724$$
$$c \log \cos \delta' = 0{,}30470$$
$$\text{log der Correction} = 7{,}11519_n + \log d,$$

g. Einfluss der Eigenbewegung auf die Zeit der Mitte bei den einzelnen Beobachtungen.

$10^h\,38'\,53''$ M.Z.	$\alpha' - \alpha$	$= -109'',173 - 0'',585 = -109'',758$
42 55		$= -111{,}705 + 0{,}598 = -111{,}107$
46 48		$= -114{,}211 + 0{,}631 = -113{,}580$
51 9		$= -114{,}938 - 0{,}476 = -115{,}414$

$10^h\,44'\,56''$
Uhrstand $-\ 18'\,48''$

Mittlere Beobachtungszeit $10^h\,26'\,8''$ $\alpha' - \alpha = -112'',46$ S.Z.

g. Reduction der Chorden auf den grössten Kreis.

$$\delta' - \delta = d, - d + \tfrac{1}{2}\, tg\,(\delta' + \delta)\ (d, + d)\ (d, - d) \sin 1''$$

$\tfrac{1}{2} \log tg \frac{\delta' + \delta}{2} = 0{,}00183$	0,00183	0,00183	0,00183
$\log (d, + d) = 3{,}93687$	$3{,}95540_n$	$3{,}96192_n$	3,91546
$\log (d, - d) = 1{,}52362$	$1{,}20003_n$	$1{,}72032_n$	$1{,}96421_n$
$\log \sin 1'' = 4{,}68557$	4,68557	4,68557	0,56707
0,14789	9,84283	0,36964	$0{,}56707_n$
Correction $+ 1'',405$	$+ 0'',696$	$+ 2'',342$	$- 3'',690$

Corrigirte $d, - d =$ $+ 34'',795$
$- 15,154$
$- 50,178$
$- 95,780$

$- 30,492$ N.
$- 32,666$ S.

$\delta' - \delta = - 31'',579$

Position des Cometen 1861 Mai 4 | $\alpha' = 9^h\, 52'\, 2'',12$
$10^h\ 26'\ 8''$ M. Z. Mannheim | $\delta' = 45^0\, 14'\, 28'',83$

Refractions - Tafel

nach Bessel.

Wahre Zenith-Distanz	log k'		Wahre Zenith-Distanz	log k'		Wahre Zenith-Distanz	log k'	
0°	1,76143	-2	71°	1,75615	63	79° 40'	1,74376	55
10	6141	6	72	5552	74	50	4321	58
20	6135	13	73	5478	88	80 0	4263	60
30	6122	10	74	5390	106	10	4203	62
35	6112	13	75 0'	75284	19	20	4141	66
40	6099	19	10	5265	20	30	4075	70
45	76080	5	20	5245	20	40	4005	72
46	6075	5	30	5225	21	50	3933	76
47	6070	5	40	5204	22	81 0	73857	80
48	6065	6	50	5182	23	10	3777	85
49	6059	6	76 0	75159	23	20	3692	87
50	76053	6	10	5136	24	30	3605	91
51	6047	7	20	5112	25	40	3514	97
52	6040	8	30	5087	27	50	3417	103
53	6032	8	40	5060	27	82 0	73314	107
54	6024	10	50	5033	28	10	3207	112
55	76014	10	77 0	75005	29	20	3095	121
56	6004	11	10	4976	31	30	2974	128
57	5993	12	20	4945	31	40	2846	135
58	5981	14	30	4914	32	50	2711	142
59	5967	14	40	4882	34	83 0	72569	151
60	75953	16	50	4848	35	10	2418	162
61	5937	18	78 0	74813	36	20	2256	173
62	5919	20	10	4777	37	30	2083	181
63	5899	22	20	4740	39	40	1902	194
64	5877	25	30	4701	41	50	1708	209
65	75852	28	40	4660	43	84 0	71499	223
66	5824	31	50	4617	44	10	71276	239
67	5793	36	79 0	74573	46	20	71037	255
68	5757	40	10	4527	49	30	70782	273
69	5717	47	20	4478	50	40	70509	293
70	75670	55	30	4428	52	50	70216	314
71	5615		40	4376		85 0	69902	

Verzeichniss von 53 Sternen der Plejaden von Bessel,

geordnet nach ihrer Declination von 1840.

No.	Benennung nach Bessel.	Grösse	Declination 1840	Präcession Jährlich 1840	Präcession Säcular-Änderung	Eigen-bewegung.	A R 1840	Präcession Jährlich 1840	Präcession Säcular-Änderung	Eigen-bewegung
1	18 m	7	24° 19′ 52,36″	11,815″	— 0,425″		53° 54′ 25,52″	53,384″	+ 0,277″	— 0,004″
2	Anonyma 21	8.9	9 22,06	11,653	— 0,428		54 28 41,90	53,377	+ 0,273	
3	„ 5	9	7 16,14	11,778	— 0,425		2 11,22	53,325	+ 0,275	
4	„ 20	8	5 15,46	11,656	— 0,428		28 5,46	53,353	+ 0,273	
5	21 k (Asterope)	7.8	2 56,40	11,761	— 0,425	— 0,057″	5 48,99	53,305	+ 0,274	+ 0,051
6	22 l	7.8	1 21,97	11,751	— 0,425	— 0,054	7 56,33	53,300	+ 0,274	+ 0,011
7	Anonyma 12	7.8	1 4,70	11,685	— 0,427		22 1,14	53,319	+ 0,273	
8	„ 39	8	0 13,63	11,436	— 0,432		55 13 58,00	53,393	+ 0,269	
9	19 e (Taygeta)	5	23 57 34,12	11,810	— 0,424	— 0,058	53 55 26,47	53,259	+ 0,274	+ 0,015
10	Anonyma 2	8.9	57 25,09	11,784	— 0,425		54 0 55,25	53,267	+ 0,274	
11	„ 31	8	54 4,70	11,521	— 0,430		56 20,32	53,331	+ 0,269	
12	„ 32	8	53 11,52	11,515	— 0,430		57 35,11	53,328	+ 0,269	
13	20 c (Maja)	5	51 43,12	11,766	— 0,425	— 0,062	4 46,31	53,240	+ 0,272	+ 0,032
14	Anonyma 37	8	51 22,51	11,473	— 0,431		55 6 17,63	53,331	+ 0,268	
15	„ 29	8	50 53,36	11,576	— 0,429		54 44 45,01	53,296	+ 0,269	+ 0,021
16	„ 4	8	49 45,23	11,780	— 0,425		1 52,66	53,225	+ 0,272	
17	„ 27	8.9	49 12,64	11,596	— 0,428		40 39,14	53,280	+ 0,270	
18	„ 24	8	47 16,49	11,648	— 0,427		29 42,52	53,253	+ 0,270	
19	„ 6	9	46 57,30	11,775	— 0,424		2 49,03	53,210	+ 0,272	
20	16 g (Celäno)	5.6	46 49,58	11,838	— 0,423	— 0,078	53 49 33,64	53,190	+ 0,273	+ 0,050
21	Anonyma 33	8.9	45 12,36	11,509	— 0,430		54 58 45,54	53,284	+ 0,268	
22	„ 10	8	45 4,35	11,721	— 0,426		14 15,83	53,217	+ 0,271	

23	Anonyma 35	9	23	45	2,15	11,485	— 0,430		55	3	47,46	53,290	+ 0,267	
24	„ 36	9		43	26,57	11,475	— 0,430			5	59,14	53,285	+ 0,267	
25	„ 8	8 . 9		41	26,35	11,757	— 0,425		54	10	56,98	53,192	+ 0,271	
26	„ 9	8 . 9		41	7,91	11,734	— 0,425			11	31,24	53,191	+ 0,270	
27	28 h (Plejone)	5 . 6		38	30,60	11,527	— 0,429	— 0,085		55	10,82	53,241	+ 0,267	+ 0,007
28	Anonyma 18	8		38	16,98	11,659	— 0,426			27	20,05	53,198	+ 0,269	
29	„ 15	8 . 9		37	37,49	11,662	— 0,426			26	39,14	53,194	+ 0,269	
30	24 p	7 . 8		36	55,12	11,657	— 0,427			27	46,26	53,191	+ 0,269	+ 0,011
31	25 η (Alcyone)	3 . 4		36	16,91	11,648	— 0,427	— 0,068		29	46,72	53,191	+ 0,268	+ 0,021
32	17 b (Electra)	4 . 5		36	16,24	11,832	— 0,423	— 0,062	53°	50	47,59	53,132	+ 0,271	+ 0,028
33	Anonyma 11	8 . 9		36	0,60	11,706	— 0,425		54	17	24,71	53,171	+ 0,269	
34	„ 3	9		34	36,65	11,782	— 0,424			1	30,81	53,139	+ 0,270	
35	27 f (Atlas)	4 . 5		33	30,41	11,528	— 0,429	— 0,077	54	54	53,68	53,212	+ 0,266	+ 0,013
36	Anonyma 7	8		32	0,41	11,762	— 0,424			5	35,15	53,131	+ 0,270	
37	„ 1	8		31	42,30	11,792	— 0,423		53	59	14,52	53,119	+ 0,270	
38	„ 13	8 . 9		29	37,12	11,676	— 0,426		54	23	41,65	53,144	+ 0,268	
39	„ 40	7 . 8		28	18,94	11,405	— 0,431		55	20	31,97	53,220	+ 0,264	
40	23 d (Merope)	5		26	39,23	11,729	— 0,425	— 0,060	54	12	37,28	53,111	+ 0,268	+ 0,070
41	Anonyma 22	8		24	50,13	11,652	— 0,426			28	47,57	53,124	+ 0,267	
42	„ 30	8 . 9		23	31,50	11,524	— 0,429			55	39,24	53,156	+ 0,265	
43	26 s	7 . 8		21	43,53	11,543	— 0,428			51	48,27	53,140	+ 0,265	+ 0,002
44	Anonyma 38	8		21	22,86	11,469	— 0,430		55	7	6,69	53,161	+ 0,264	
45	„ 16	9 . 10		18	58,24	11,661	— 0,426		54	26	58,66	53,089	+ 0,266	
46	„ 19	8		18	9,11	11,656	— 0,426			28	1,82	53,086	+ 0,266	
47	„ 14	9		16	44,31	11,668	— 0,425			25	23,59	53,074	+ 0,266	
48	„ 17	8		13	29,57	11,659	— 0,426			27	18,67	53,059	+ 0,266	
49	„ 34	7 . 8		13	7,69	11,486	— 0,429		55	3	36,72	53,109	+ 0,263	
50	„ 23	8 . 9		10	40,14	11,648	— 0,425		54	29	36,40	53,046	+ 0,265	
51	„ 25	8 . 9		6	35,59	11,637	— 0,425			32	5,30	53,027	+ 0,264	
52	„ 26	9		2	35,89	11,629	— 0,425			33	36,76	53,006	+ 0,263	
53	„ 28	7	22	55	25,93	11,583	— 0,426	— 0,061	54	43	17,17	53,980	+ 0,262	— 0,003